Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2017

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur le même espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$. On note $\mathbf{P}$ une probabilité sur cet espace. On note $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{Var}(X)$ les espérance et variance (pour la probabilité $\mathbf{P}$) d'une variable X. Si $A \in \mathscr{A}$, on note $\mathbf{1}_A$ son indicatrice, c'est-à-dire l'application qui à chaque $\omega \in \Omega$ associe 1 si $\omega \in A$ et 0 sinon. Si $A \in \mathscr{A}$ est de probabilité non nulle, on note $\mathbf{P}_A$ la probabilité conditionnelle sachant A et, s'il y a lieu, $\mathbf{E}_A(X)$ l'espérance, pour $\mathbf{P}_A$, d'une variable aléatoire X.

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

L'objet du problème est, principalement, l'étude de la variable aléatoire égale au maximum de n variables indépendantes toutes de même loi géométrique.

La partie **I** regroupe des questions indépendantes dont les résultats seront utilisés par la suite.

Partie I. Préliminaires

1. `Un résultat bien connu`

a) Montrer que la suite de terme général $u_n = H_n - \ln n$ est monotone.

b) En déduire l'existence d'un réel noté γ pour lequel on a, quand l'entier n tend vers $+\infty$,

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

2. `Un résultat de bornitude...`

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction f a une limite nulle en $+\infty$. Montrer que la fonction f est bornée.

3. `Une formulation intégrale des moments d'une variable positive`

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Établir, pour tout entier naturel N, l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}([X > k]) = \sum_{k=1}^{N} k\mathbf{P}([X = k]) + (N+1)\mathbf{P}([X > N]).$$

b) On suppose que la variable X possède une espérance.

(i) Établir l'égalité : $\lim\limits_{N\to+\infty} (N+1)\mathbf{P}([X > N]) = 0$.

(ii) En déduire que la série $\sum \mathbf{P}([X > n])$ converge et qu'on a l'égalité :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X > n]).$$

c) On suppose, réciproquement, que la série $\sum \mathbf{P}([X > n])$ converge. Montrer que la variable X possède une espérance qu'on a l'égalité : $\mathbf{E}(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X > n])$.

d) **(i)** Vérifier que la fonction qui à chaque réel t associe $\mathbf{P}([X > t])$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(ii) Montrer que X a une espérance si, et seulement si, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{P}([X > t])\mathrm{d}t$$

converge et que, dans ce cas, on a l'égalité : $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{P}([X > t])\mathrm{d}t$.

e) Montrer que X a un moment d'ordre 2 si, et seulement si, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t\mathbf{P}([X > t])\mathrm{d}t$$

converge et que, dans ce cas, on a l'égalité : $\mathbf{E}(X^2) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathbf{P}([X > t])\mathrm{d}t$.

4. `Autour du produit de convolution`

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On pose, pour tout entier naturel n,

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\,.$$

On suppose que, pour tout réel x, les séries $\sum u_n x^n$ et $\sum v_n x^n$ convergent absolument. On rappelle, ou on admet, qu'alors, pour tout réel x, la série $\sum w_n x^n$ converge absolument et qu'on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n\Big).$$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On pose, pour tout entier naturel n,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\,.$$

On suppose que, pour tout réel x, les séries $\sum \frac{a_n}{n!}\,x^n$ et $\sum \frac{b_n}{n!}\,x^n$ convergent absolument. Montrer que, pour tout réel x, la série $\sum \frac{c_n}{n!} x^n$ converge absolument et qu'on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n!}\,x^n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}\,x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!}\,x^n\Big).$$

5. `Loi conditionnelle d'un vecteur aléatoire`

a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in\,]0,1[$. Quelle est la loi de $X-1$ pour la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{[X>1]}$?

b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, … , X_r des variables aléatoires **indépendantes** toutes de même loi, chacune suivant la loi géométrique (sur $\mathbb{N}^*$) de paramètre $p \in\,]0,1[$. On note

$$A = \bigcap_{i=1}^{r} [X_i > 1]\,.$$

Montrer que le vecteur aléatoire $(X_1-1, X_2-1, \ldots, X_r-1)$ a, pour la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_A$, même loi que le vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ (pour la probabilité $\mathbf{P}$).

6. `La formule de l'espérance totale`

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

a) Soit A un événement de probabilité non nulle et soit X une variable aléatoire possédant une espérance. Montrer que le produit $X\,\mathbf{1}_A$ a une espérance et exprimer $\mathbf{E}\,(X\,\mathbf{1}_A)$ à l'aide de $\mathbf{E}_A(X)$.

b) On considère des événements A_1, A_2, … , A_n, chacun étant de probabilité non nulle, formant une partition de Ω. Soit X une variable aléatoire, définie sur l'espace $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et possédant une espérance. Établir l'égalité :

$$\mathbf{E}\,(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}_{A_k}(X)\mathbf{P}(A_k).$$

Dans toute la suite du problème on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires **indépendantes** toutes de même loi, chacune suivant la loi géométrique (sur $\mathbb{N}^*$) de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On note, pour tout entier naturel n non nul et tout $\omega \in \Omega$,

$$I_n(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) \quad \text{et} \quad M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

7. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, l'application I_n est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. *Il en est de même, et on l'admet, de l'application M_n.*

Partie II. Étude du minimum

1. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, I_n suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

2. Quelles sont les limites de $\mathbf{E}(I_n)$, $\mathbf{Var}(I_n)$ et, pour tout entier naturel k non nul, $\mathbf{P}([I_n = k])$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

3. **a)** Soit $\omega \in \Omega$. Justifier l'existence d'une limite finie, notée $\ell(\omega)$, pour la suite de terme général $I_n(\omega)$.

b) Exprimer la partie $\mathscr{L}$ définie par $\mathscr{L} = \{\omega \in \Omega \,;\, \ell(\omega) = 1\}$ en fonction des événements $[I_n = 1]$ et en déduire que la partie $\mathscr{L}$ est un événement presque sûr.

Partie III. Étude du maximum

1. `L'espérance de` M_n `tend vers` $+\infty$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) Justifier l'existence d'une espérance pour la variable M_n et l'encadrement

$$\frac{1}{p} \leqslant \mathbf{E}(M_n) \leqslant \frac{n}{p}.$$

(ii) Déterminer, pour tout entier naturel k, la valeur de $\mathbf{P}([M_n \leqslant k])$.

b) **(i)** Soit $K \in \mathbb{N}^*$. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\mathbf{E}(M_n) \geqslant \mathbf{E}(M_n \mathbf{1}_{[M_n \leqslant K]}) + K\,\mathbf{P}([M_n > K]).$$

(ii) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(M_n) = +\infty$.

2. `Deux expressions de l'espérance de` M_n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Établir l'égalité : $\mathbf{E}(M_n) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i-1} \frac{1}{1-q^i}$. *On utilisera le résultat de I-3-b-ii).*

b) On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x. Établir l'égalité :

$$\mathbf{E}(M_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 - (1 - q^{\lfloor t \rfloor})^n\right) \mathrm{d}t.$$

On utilisera le résultat de I-3-d-ii).

3. `Estimation de l'espérance de` M_n

a) Justifier, pour tout entier naturel k, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} q^t(1-q^t)^k\,\mathrm{d}t$ et déterminer sa valeur.

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$\int_0^{+\infty}\Big(1-(1-q^t)^n\Big)\,\mathrm{d}t = -\frac{H_n}{\ln q}\cdot$$

c) **(i)** Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement :

$$-\frac{H_n}{\ln q} \leqslant \mathbf{E}(M_n) \leqslant -\frac{H_n}{\ln q}+1\,.$$

En déduire l'équivalent de $\mathbf{E}(M_n) \sim -\dfrac{\ln n}{\ln q}$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

(ii) **Déduire** de l'encadrement précédent, pour tout $x \in \,]0,1[$, l'encadrement :

$$-\frac{x}{1-x} \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x.$$

4. `Estimation de la variance de` M_n

a) Soit $k \in \mathbb{N}$.

(i) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,q^t(1-q^t)^k\,\mathrm{d}t$ dont on note α_k la valeur.

(ii) Établir l'égalité $\alpha_k = -\dfrac{1}{(k+1)\ln q}\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big(1-(1-q^t)^{k+1}\Big)\,\mathrm{d}t\cdot$

b) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\Big(1-(1-q^t)^n\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k}$ puis l'encadrement

$$\frac{2}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k} \leqslant \mathbf{E}(M_n^2) \leqslant 1+\frac{2}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k}-2\frac{H_n}{\ln q}\cdot$$

c) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $H_n^2 = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\cdot$

d) En déduire l'estimation asymptotique $\mathbf{Var}(M_n) = O(\ln n)$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

Partie IV. Comportement asymptotique de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. Prouver, pour tout $x \in [0,1[$, l'encadrement : $-\dfrac{x^2}{1-x} \leqslant x+\ln(1-x) \leqslant 0.$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver, pour tout entier naturel k non nul, les majorations :

$$\left|\mathrm{e}^{-nq^k}-(1-q^k)^n\right| \leqslant \frac{n\,q^{2k}}{1-q^k}\,\mathrm{e}^{-nq^k} \leqslant \frac{n\,q^{2k}}{1-q}\,\mathrm{e}^{-nq^k}.$$

3. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

4. Déduire des questions précédentes le résultat asymptotique suivant :

$$\lim_{n\to\infty}\ \mathop{\mathrm{Sup}}_{k\in\mathbb{N}^*}\left|\mathbf{P}([M_n \leqslant k])-\mathrm{e}^{-nq^k}\right| = 0.$$

Partie V. Où l'on retrouve une formule exacte pour l'espérance de M_n

Dans cette dernière partie on suppose que $p = \dfrac{1}{2}$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
On pose $m_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, $m_n = \mathbf{E}(M_n)$.

1. On note $B_0 = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i > 1]$, $B_n = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i = 1]$ et, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$B_k = \Big(\bigcap_{i=1}^{k} [X_i = 1]\Big) \cap \Big(\bigcap_{i=k+1}^{n} [X_i > 1]\Big).$$

a) Établir, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, l'égalité : $\mathbf{E}_{B_k}(M_n) = 1 + m_{n-k}$.

b) En utilisant la formule de l'espérance totale, établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$m_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1 + m_{n-k}).$$

2. Justifier, pour tout réel x, la convergence de la série de terme général $\dfrac{m_n}{n!}\, x^n$.

On note, pour tout réel x, $M(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m_n}{n!}\, x^n$.

3. Établir, pour tout réel x, l'égalité : $M(2x) = \mathrm{e}^{2x} - 1 + M(x)\,\mathrm{e}^{x}$.

On note, pour tout réel x, $G(x) = M(x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
On a donc, pour tout réel x, $G(2x) = 1 - \mathrm{e}^{-2x} + G(x)$.

4. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$\mathbf{E}(M_n) = m_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{2^k}{2^k - 1}.$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2017

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Dans tout le problème, n désigne un nombre entier supérieur ou égal à deux.

Selon une formule classique, que l'on pourra admettre dans toute la suite, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \dots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix}$$

admet pour déterminant le nombre réel $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$, appelé *déterminant de Vandermonde*, que l'on notera dans la suite $v_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

L'objet du problème est l'étude de déterminants de matrices d'une forme plus générale, appelés *déterminants vandermondiens*, définis comme suit.

Pour toute famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ de fonctions définies sur un ensemble $\mathscr{S}$, à valeurs réelles, et tout élément $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathscr{S}^n$, on note

$$V_{f_1,\dots,f_n}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_n) \end{pmatrix}$$

et $v_{f_1,\dots,f_n}(x_1, \dots, x_n)$ le déterminant de cette matrice.

Bien que les déterminants vandermondiens interviennent dans les trois parties du sujet, celles-ci sont largement indépendantes.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Partie 1 : polynômes de Tchebycheff de seconde espèce

Dans cette partie, $x_1, x_2, \dots, x_n$ désignent n nombres réels vérifiant les inégalités strictes

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \pi$$

et on note $s_1, s_2, \dots, s_n$ les n fonctions définies par :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad s_i(x) = \sin(i\, x)\ .$$

On considère la suite $\big(U_p(X)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définis par :

$$\begin{cases} U_0(X) = 1 \\ U_1(X) = 2X \\ \forall\, p \in \mathbb{N}, \quad U_{p+2}(X) = 2XU_{p+1}(X) - U_p(X) \end{cases} .$$

1. a) Calculer $U_2(X)$ et $U_3(X)$, puis indiquer la parité de la fonction $x \longmapsto U_p(x)$, selon les valeurs de p.

   b) Pour tout entier naturel p, déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme $U_p(X)$.

   c) Justifier que $\big(U_0(X), U_1(X), \dots, U_n(X)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$.

   a) Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer $\sin\big((p+2)\,t\big) + \sin(p\,t)$ en fonction de $\sin\big((p+1)\,t\big)$ et $\cos(t)$.

   b) En déduire que pour tout entier naturel p, on a :

   $$\sin\big((p+1)\,t\big) = \sin(t)\, U_p\big(\cos(t)\big)\ .$$

   c) Justifier que le polynôme $U_n(X)$ possède n racines distinctes, qui appartiennent toutes à l'intervalle ouvert $]-1, +1[$.

3. Pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on pose : $\quad c_{i,j} = 2^{1-i}\, U_{i-1}\big(\cos(x_j)\big)$.
   On note C la matrice $\big(c_{i,j}\big)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $L_1, L_2, \dots, L_n$ les lignes de cette matrice.

   a) Justifier l'existence de nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que :

   $$L_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_j\, L_j = \big(\cos^{n-1}(x_1) \quad \cos^{n-1}(x_2) \quad \dots \quad \cos^{n-1}(x_n)\big) \quad .$$

   b) Démontrer que le déterminant de C est égal à $v_n\big(\cos(x_1), \cos(x_2), \dots, \cos(x_n)\big)$.

   c) Établir la formule :

   $$v_{s_1,\dots,s_n}(x_1, \dots, x_n) = 2^{n(n-1)/2} \left(\prod_{k=1}^{n} \sin(x_k)\right) \left(\prod_{1\le i<j\le n} \big(\cos(x_j) - \cos(x_i)\big)\right).$$

   d) En déduire l'indépendance linéaire des fonctions $s_1, s_2, \dots, s_n$.

4. a) Calculer, pour tout couple (p,q) de nombres entiers naturels, l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \sin(pt)\sin(qt)\,\mathrm{d}t.$$

b) En déduire que :

$$\forall\,(p,q)\in\mathbb{N}^2,\quad \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} U_p(t)\,U_q(t)\,\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{si } p=q \\ 0 & \text{si } p\neq q \end{cases}.$$

5. On note V^* la comatrice de la matrice $V_{U_0,U_1,\ldots,U_{n-1}}\big(\cos(x_1),\cos(x_2),\ldots,\cos(x_n)\big)$ et $v^*(i,j)$ ses coefficients (pour tout couple $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $v^*(i,j)$ est le coefficient situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne de V^*).

a) Justifier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$\varphi : t \longmapsto v_{U_0,U_1,\ldots,U_{n-1}}\big(\cos(x_1),\ldots,\cos(x_{n-1}),t\big).$$

b) Démontrer l'égalité

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\big(\varphi(t)\big)^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n}\big(v^*(i,n)\big)^2.$$

Partie 2 : factorisations de déterminants vandermondiens

1. a) Justifier que la fonction $x\longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ admet un unique prolongement continu à $\mathbb{R}$ et démontrer, en utilisant une série entière, que ce prolongement est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

La fonction ainsi prolongée sera notée sinc (pour *sinus cardinal*).

b) Pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on note : $c(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\cos(x)-\cos(y)}{x-y} & \text{si } x\neq y \\ -\sin(x) & \text{si } x=y\end{cases}.$

Exprimer $c(x,y)$ à l'aide des fonctions sin et sinc, et en déduire que la fonction c est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

c) En déduire, à l'aide de la formule démontrée dans la question 3.c de la première partie, que la fonction $b:(x_1,x_2,\ldots,x_n)\longmapsto \dfrac{v_{s_1,\ldots,s_n}(x_1,\ldots,x_n)}{v_n(x_1,\ldots,x_n)}$ admet un prolongement de classe C^∞ à $\mathbb{R}^n$.

2. Dans cette question, f et g désignent des fonctions à valeurs réelles, continues sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ (avec $a<b$), dérivables sur l'intervalle ouvert $]a,b[$.

a) En appliquant le théorème de Rolle à une fonction de la forme $x\longmapsto v_{f_1,f_2,f_3}(a,b,x)$, justifier l'existence d'un élément c de $]a,b[$ vérifiant :

$$\frac{g(b)f(a)-g(a)f(b)}{b-a} = g'(c)\,\frac{bf(a)-af(b)}{b-a} - f'(c)\,\frac{bg(a)-ag(b)}{b-a}.$$

b) En quoi le résultat précédent est-il une généralisation du théorème des accroissements finis ?

3. Dans cette question f et g désignent des fonctions polynomiales à coefficients réels.

   • La première est de degré n : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$, avec $a_n \neq 0$.

   • La seconde est de degré inférieur ou égal à n : $\forall x \in \mathbb{R},\ b(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i\, x^i$.

   a) Soit k et ℓ deux éléments distincts de $[\![1, n]\!]$.

   Justifier que, pour $x \neq y$, le quotient $\dfrac{x^k y^\ell - x^\ell y^k}{x-y}$ est une combinaison linéaire de monômes de la forme $x^i y^j$, avec $(i, j) \in [\![0, n-1]\!]^2$.

   b) Pour tout réel x, on note $C(x)$ la matrice-colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{pmatrix}$ et $L(x)$ sa transposée.

   Justifier l'existence d'une unique matrice carrée $B(f, g) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant, pour tout couple (x, y) de réels distincts, l'égalité :

$$\frac{f(x)g(y) - g(x)f(y)}{x-y} = L(x)\, B(f, g)\, C(y) \cdot$$

   c) Démontrer que si une matrice-colonne M vérifie $L(x)\, M = 0$ pour tout réel x, alors M est nulle.

   d) En déduire que si les deux polynômes $\sum_{i=0}^{n} a_i\, X^i$ et $\sum_{i=0}^{n} b_i\, X^i$ ont une racine réelle commune, alors la matrice $B(f, g)$ n'est pas inversible.

Partie 3 : unisolvance et interpolation

Soit $\mathscr{S}$ un ensemble non vide et F un sous-espace vectoriel de dimension n du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathscr{S}$ dans $\mathbb{R}$.

On dit qu'un n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments de $\mathscr{S}$ est *unisolvant* pour F si le seul élément de F qui s'annule en chacun des x_j est la fonction nulle :

$$\forall f \in F,\ \Big[\big(\forall j \in [\![1, n]\!],\ f(x_j) = 0\big) \Longrightarrow \big(\forall x \in \mathscr{S},\ f(x) = 0\big)\Big] .$$

1. a) Justifier que $\mathscr{S}$ possède au moins n éléments.

   b) Démontrer que, si un n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments de $\mathscr{S}$ est unisolvant pour F, alors $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont nécessairement deux à deux distincts.

2. Soit $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de F et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathscr{S}^n$.

   a) Démontrer que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est unisolvant pour F si, et seulement si, le déterminant vandermondien $v_{f_1,\dots,f_n}(x_1, \dots, x_n)$ est différent de 0.

   b) Soit $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Justifier que si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est unisolvant pour F, alors il existe un unique élément f de F vérifiant :

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!],\ f(x_j) = y_j\ .$$

   c) En utilisant la formule démontrée dans la question 3.c de la première partie, justifier que pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments deux à deux distincts de $]0, \pi[$ et toute fonction réelle g définie sur cet intervalle, il existe un unique vecteur $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vérifiant :

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} a_i\, s_i(x_j) = g(x_j)\ .$$

3. On dit que F est *unisolvant* si tout n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments deux à deux distincts de $\mathscr{S}$ est unisolvant pour F.

   a) Dans le cas où $\mathscr{S} = \mathbb{R}$, justifier que l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n-1$ est unisolvant.

   b) Dans le cas où $\mathscr{S} = \mathbb{R}$, montrer que l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n qui s'annulent en 0 n'est pas unisolvant et déterminer les n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qui sont unisolvants pour cet espace vectoriel.

4. Dans cette question, on étudie le cas où $\mathscr{S} = \mathbb{R}^2$ et on suppose que tous les éléments de l'espace vectoriel F sont des applications continues (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$).
   On cherche à montrer que F ne peut pas être unisolvant.

   Soit $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de F et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un n-uplet de vecteurs deux à deux distincts de $\mathbb{R}^2$ tel que le déterminant vandermondien $v_{f_1,\dots,f_n}(x_1, \dots, x_n)$ n'est pas nul.

   On considère un vecteur y de $\mathbb{R}^2$ non colinéaire au vecteur $x_1 - x_2$ et pour tout réel $r > 0$, on définit l'application γ_r de $[0, 1]$ dans $(\mathbb{R}^2)^n$ par :

$$\forall\, t \in [0,1],\ \gamma_r(t) = \big((1-t)x_1 + t\,x_2 + r\,\sin(\pi\, t)\,y,\ (1-t)x_2 + t\,x_1 - r\,\sin(\pi\, t)\,y,\ x_3, \dots, x_n\big)\ .$$

   a) Soit $r > 0$.
   Calculer $\gamma_r(0)$ et $\gamma_r(1)$, puis en déduire qu'il existe un réel t compris entre 0 et 1 pour lequel le déterminant vandermondien $v_{f_1,\dots,f_n}(\gamma_r(t))$ est nul.

   b) Justifier que, pour tout $r > 0$ et tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$(1-t)x_1 + t\,x_2 + r\,\sin(\pi\, t)\,y \neq (1-t)x_2 + t\,x_1 - r\,\sin(\pi\, t)\,y\ .$$

   c) Prouver qu'il existe au plus un élément (t, r) de $]0, 1[\times]0, +\infty[$ pour lequel

$$(1-t)x_1 + t\,x_2 + r\,\sin(\pi\, t)\,y = x_3\ .$$

   d) En généralisant le résultat précédent, justifier qu'il existe un réel $r > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, 1]$, les n vecteurs

$$(1-t)x_1 + t\,x_2 + r\,\sin(\pi\, t)\,y,\ (1-t)x_2 + t\,x_1 - r\,\sin(\pi\, t)\,y,\ x_3, \dots, x_n$$

   de $\mathbb{R}^2$ sont distincts deux à deux.

   e) Conclure.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2017

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h

Le sujet se compose d'un exercice et d'un problème dont les différentes parties peuvent, dans une certaine mesure, être traitées de manière indépendante, quitte à admettre les résultats des parties précédentes. La qualité de la rédaction et la précision des réponses apportées entrent pour une part importante dans la notation. Les réponses absurdes sont pénalisées.

Problème

Dans tout le problème, X désigne une variable aléatoire réelle, prenant ses valeurs exclusivement dans l'intervalle $]0,+\infty[$. La fonction de répartition de X est notée F_X. On rappelle sa définition : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

On pose en outre deux hypothèses supplémentaires sur X : pour tout $x > 0$, on a $\mathbb{P}(X = x) = 0$, et, d'autre part, pour tous $0 < a < b$, on a $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) > 0$. In fine, on a donc les propriétés suivantes pour F_X, qu'il n'est pas nécessaire de redémontrer :

(i) $F_X(0) = 0$.
(ii) $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
(iii) La fonction F_X est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
(iv) La fonction F_X est continue.

Partie I – Quelques calculs avec la loi uniforme sur $]0,1[$

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire U prenant ses valeurs dans l'intervalle $]0,1[$, et suivant la loi uniforme sur cet intervalle. La loi de U est donc caractérisée par la fonction de densité f_U définie sur $\mathbb{R}$ par $f_U(u) = 1$ pour $u \in]0,1[$, et $f_U(u) = 0$ pour $u \notin]0,1[$.
1) On note F_U la fonction de répartition de U. Montrer que, pour tout $u \in [0,1]$, on a la relation $F_U(u) = u$.
2) On considère deux nombres réels $0 \leq a \leq b \leq 1$. Montrer que $\mathbb{P}(a \leq U \leq b) = b - a$.
3) Montrer que la variable aléatoire $(1-U)$ suit également la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$.
4) Calculer la valeur de $\mathbb{E}(U)$.
5) Plus généralement, calculer la valeur de $\mathbb{E}(U^m)$, pour tout entier $m \geq 1$.

Partie II – Fonction quantile q_X

6) Montrer que, pour tout $u \in]0,1[$, il existe un et un seul nombre réel $x \in]0,+\infty[$ vérifiant l'identité $F_X(x) = u$.

Dans toute la suite, on note $q_X(u)$ le nombre réel x dont l'existence est établie à la question 1). On a donc, pour tout $u \in]0,1[$, l'identité $F_X(q_X(u)) = u$.

7) Montrer que, pour tout $u \in]0,1[$, on a $\mathbb{P}(X \geq q_X(u)) = 1 - u$.
8) Montrer que, pour tous $0 < u < v < 1$, on a l'inégalité $q_X(u) < q_X(v)$.
9) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a équivalence entre la condition $q_X(u) \leq x$ et la condition $u \leq F_X(x)$.
10) On considère une variable aléatoire U prenant ses valeurs dans l'intervalle $]0,1[$, et suivant la loi uniforme sur cet intervalle, comme décrit dans la partie I. Montrer que la variable aléatoire Y définie par $Y = q_X(U)$ suit la même loi de probabilité que la variable aléatoire X.
Indication : calculer la fonction de répartition de Y.
11) On définit la variable aléatoire V par $V = F_X(X)$. Montrer que V suit la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$.
12) Etablir la formule

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 q_X(u)\,du.$$

Partie III – Expériences répétées

Dans cette partie, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$, que l'on suppose indépendantes, et suivant chacune la même loi de probabilité que X. Etant donné un nombre $u \in]0,1[$, on introduit la variable aléatoire $T_1(u)$ définie par

$$T_1(u) = \inf\left\{n \geq 1 \mid X_n \geq q_X(u)\right\},$$

avec la convention $T_1(u) = +\infty$ s'il n'existe aucun entier $n \geq 1$ pour lequel $X_n \geq q_X(u)$. La variable aléatoire $T_1(u)$ correspond donc au plus petit indice n tel que $X_n \geq q_X(u)$.
13) Pour tout entier $k \geq 1$, donner une expression de l'événement $\{T_1(u) = k\}$ en termes des valeurs prises par les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k$.
14) Exprimer pour tout entier $k \geq 1$ la valeur de $\mathbb{P}(T_1(u) = k)$.
15) Calculer l'espérance et la variance de $T_1(u)$.

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire $X_{T_1(u)}$ définie par le fait que, pour tout entier $k \geq 1$, $X_{T_1(u)} = X_k$ lorsque $T_1(u) = k$, et (par convention) $X_{T_1(u)} = 0$ lorsque $T_1(u) = +\infty$.

16) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, et tout $x \geq q_X(u)$, on a

$$\mathbb{P}\left(X_{T_1(u)} \leq x | T_1(u) = k\right) = \frac{F_X(x)}{1-u} - \frac{u}{1-u}.$$

17) En déduire que, pour tout $x \geq q_X(u)$, on a

$$\mathbb{P}\left(X_{T_1(u)} \leq x\right) = \frac{F_X(x)}{1-u} - \frac{u}{1-u}.$$

18) En déduire l'identité

$$\mathbb{E}\left(X_{T_1(u)}\right) = q_X(u) + \frac{1}{1-u}\int_{q_X(u)}^{+\infty}(1-F_X(x))\,dx.$$

Indication : On rappelle la formule, valable pour toute variable aléatoire positive W :
$\mathbb{E}(W) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(W > w)\,dw$.

On introduit maintenant la variable aléatoire $N_n(u)$ définie par

$$N_n(u) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{X_j \geq q_X(u)},$$

où la notation $\mathbf{1}_A$ désigne la variable aléatoire indicatrice de l'événement A, c'est-à-dire la variable aléatoire définie par :

$$\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } A \text{ n'est pas réalisé} \end{cases}.$$

19) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $N_n(u)$? Donner la valeur de son espérance et de sa variance.

20) Formaliser et justifier, au moyen de la loi des grands nombres, l'affirmation (imprécise) suivante : « sur un grand nombre n de répétitions, la proportion des cas pour lesquels $X_j \geq q_X(u)$ doit être approximativement égale à $1-u$ ».
21) Etant donné une valeur $u \in]0,1[$, proposer un moyen d'obtenir une estimation de $q_X(u)$ à partir de la donnée d'une « longue » série de valeurs $X_1,\dots,X_n$.
22) Pour tout $n \geq 1$, et tout $0 < u < 1$, on définit la variable aléatoire $R_n(u)$ par $R_n(u) = 0$ lorsque $N_n(u) = 0$, et, lorsque $N_n(u) > 0$, par

$$R_n(u) = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j \mathbf{1}_{X_j \geq q_X(u)}}{N_n(u)}.$$

Etudier le comportement de $R_n(u)$ lorsque $n \to +\infty$. (Justifier votre réponse.)

Partie IV – Deux exemples

On suppose pour commencer que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. La loi de X est donc caractérisée par la fonction de densité f_X définie sur $\mathbb{R}$ par $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$, et $f_X(x) = 0$ pour $x < 0$.
23) Calculer la valeur de $q_X(u)$ pour tout $u \in]0,1[$.
24) En déduire que la variable aléatoire $-\frac{1}{\lambda}\ln(U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ, où U est la variable aléatoire étudiée dans la partie I.
25) Calculer la valeur de $\mathbb{E}(X_{T_1(u)})$ en fonction de λ et de u.
26) Comment se comporte le rapport $\frac{\mathbb{E}(X_{T_1(u)})}{q_X(u)}$ lorsque $u \to 1$?

On suppose à présent que X suit une loi caractérisée par la fonction de densité définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_X(x) = \left(\frac{\alpha}{s}\right)\frac{1}{(1+x/s)^{\alpha+1}} \text{ pour } x \geq 0\text{ , et } f_X(x) = 0 \text{ pour } x < 0,$$

où $s > 0$ et $\alpha > 1$.
27) Calculer la fonction de répartition de X.
28) Calculer la valeur de $q_X(u)$ pour tout $u \in]0,1[$.
29) Calculer la valeur de $\mathbb{E}(X_{T_1(u)})$ en fonction de (s,α) et de u.
30) Comment se comporte le rapport $\frac{\mathbb{E}(X_{T_1(u)})}{q_X(u)}$ lorsque $u \to 1$? Commenter la différence éventuelle avec le résultat obtenu à la question 26).

Partie IV – Avec une loi discrète

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire D prenant un nombre fini de valeurs distinctes $0 < x_1 < \cdots < x_m$, associées respectivement à des probabilités que l'on note $p_1 = \mathbb{P}(D = x_1),\dots,p_m = \mathbb{P}(D = x_m)$, toutes supposées strictement positives. On pose ensuite $\pi_0 = 0$, et, pour tout $\ell \in \{1,\dots,m\}$, $\pi_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} p_j$. Pour tout $u \in]0,1[$, on définit alors $q_D(u)$ comme le nombre x_ℓ, où $\ell \in \{1,\dots,m\}$ est l'unique entier tel que $\pi_{\ell-1} < u \leq \pi_\ell$.
31) On considère une variable aléatoire U prenant ses valeurs dans l'intervalle $]0,1[$, et suivant la loi uniforme sur cet intervalle, comme décrit dans la partie I. Montrer que la variable aléatoire G définie par $G = q_D(U)$ suit la même loi de probabilité que la variable aléatoire D.
32) La loi de probabilité de la variable $F_D(D)$ peut-elle être la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$?

Exercice

On considère une suite de variables aléatoires $(W_n)_{n\geq 1}$, indépendantes, et suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On considère d'autre part une variable aléatoire X_0 suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma_0^2)$, indépendante de la suite $(W_n)_{n\geq 1}$. On définit ensuite par récurrence les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ via la relation, valable pour tout $n \geq 1$:

$$X_n = \alpha X_{n-1} + \sigma W_n,$$

où α et σ sont deux nombres donnés vérifiant $\sigma > 0$ et $\alpha \in]-1,1[$.

A) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, la variable X_n suit une loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma_n^2)$, où la suite $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ obéit à une relation de récurrence que l'on précisera.

B) On pose $\sigma_\star = \sqrt{\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}}$. Montrer que, si $\sigma_0 = \sigma_\star$, alors pour tout $n \geq 1$, X_n suit la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma_\star^2)$.

C) Montrer que, de manière générale, on a $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n^2 = \sigma_\star^2$.

Dans toute la suite, on suppose que $\sigma_0 = \sigma_\star$.

D) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1}) = \alpha\sigma_\star^2$. Les variables X_n et X_{n+1} sont-elles indépendantes en général ?

E) Montrer que, pour tout $n \geq 0$ et tout $\ell \geq 1$, on a la relation :

$$X_{n+\ell} = \alpha^\ell X_n + \sum_{k=0}^{\ell-1} \sigma\alpha^k W_{n+\ell-k}.$$

F) En déduire que pour tout $n \geq 0$ et tout $\ell \geq 1$, on a :

$$\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+\ell}) = \alpha^\ell \sigma_\star^2.$$

G) Donner une expression de la variance $\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n)$, et en déduire une inégalité de la forme $\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) \leq Cn$, où C est une constante positive.

H) Déduire de la question précédente que l'on a la convergence en probabilité suivante :

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2017

Épreuve de français

Durée : 2h

Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas, c'est-à-dire, le plus grand*, comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé. Le candidat doit indiquer sur sa copie les tranches de 50 mots ainsi que le nombre total de mots utilisés.

Du Moyen Age, hanté par l'ombre de Dieu, au siècle des Lumières, travaillé par l'essor de la Raison, les époques se distinguent par les questions qu'elles se posent. Toutes ont pourtant interrogé l'énigme de notre apparition et les conditions de notre vie commune, à chaque fois selon un nouvel angle, sans jamais parvenir à trouver *la* solution. Dans son pragmatisme, la nôtre semble seule à dédaigner ces grandes controverses ; ni l'origine, ni la finalité de la vie ne l'intéresse plus trop : notre opium n'est plus au ciel, ni même sur Terre, mais en nous. « Être un peuple, voilà la religion de notre temps », affirmait Ernst Moritz Arndt, chantre du nationalisme allemand, à l'aube du XIXe siècle : être *soi* est la nôtre. J'éprouve, nous éprouvons, le besoin impérieux de nous extraire du flux anonyme des choses, de *personnaliser* toujours plus notre humanité : devenir ce que nous sommes est devenu, Nietzsche aidant, une exigence aussi insatiable que la faim. Il faut être soi pour donner sens à sa vie et s'estimer, devenir chaque jour un peu plus l'individu *qu'on porte en soi* pour combler les lacunes d'un ordre symbolique affaibli. Le philosophe était vécu comme un sculpteur d'homme dans la cité antique et le prêtre comme celui de l'âme, dans les royaumes chrétiens : nous rêvons de devenir et le créateur, et la sculpture.

Des écrits grecs sur *la vie bonne* aux manuels romains encourageant l'examen de soi, l'individualité a une histoire, avant même que saint Augustin ne donne sa profondeur au sujet chrétien, en le poussant à s'étudier moralement. Certains voient le sujet se déprendre de ses gangues collectives pour affirmer son autonomie dès le Moyen Age, dans l'Angleterre rurale ; d'autres datent ce décrochage de la floraison créatrice que suscita la Renaissance italienne, sinon de l'étonnant succès des *Essais* de Montaigne. On trouve des penseurs pour situer au siècle des Lumières l'émergence d'un individu qui, las d'être le sujet du Tout-Puissant et de ses princes, se pose en propriétaire de lui-même et en maître rationnel de sa destinée. La Réforme protestante, en prônant une relation directe entre Dieu et soi, puis le Romantisme, en encourageant les confessions mêlant lyrisme et égocentrisme, jouèrent aussi leur rôle : « Dans les sociétés démocratiques, chaque citoyen est habituellement occupé à contempler un très petit objet qui est lui-même », écrit déjà Tocqueville en 1840 [1], déduisant du seul modèle américain ce qui va devenir notre ordinaire ; cette tendance s'est creusée jusqu'à faire de certains d'entre nous leur propre origine et leur finalité. Le souci que nous avons de notre personne, de ses frustrations réelles et de ses traumatismes supposés, est devenu d'une intensité que les hommes du passé auraient jugée pathologique ; le narcissisme est devenu phénomène de masse.

La croyance en l'individualité repose pourtant sur des bases fragiles ; ce noyau qui fonde notre spécificité, cette invisible boîte noire qui enregistrerait tout du monde en soi que nous sommes devenu, échappe à tout critère d'évaluation. En définir le contenu, la structure et la forme est si ardu qu'on doit recourir à toutes sortes de notions, de la conscience au *ça*, de l'ego au *self*, de la personnalité à l'identité, de la subjectivité au propre — sans parler de l'âme des théologiens ou du karma des hindouistes —, des notions qui se recoupent et se contaminent, à mi-chemin de la psychologie et de la sociologie, de la psychanalyse, de la philosophie et de la théologie, en muant à chaque auteur, sinon à chaque ouvrage, jusqu'à échapper à toute définition. Comme le temps ou le mouvement, l'identité glisse entre les doigts ; analyser ce qui nous rend incomparable, c'est avoir affaire à des fragments dont l'originalité ou l'autonomie s'avère vite problématique, la plupart résultant d'un compromis passé avec le monde, ou du long processus d'interaction qui a fini par nous doter de traits

1. De la démocratie en Amérique, t. II, 1ère partie, ch. XVIII.

reconnaissables. Ne devrait-on pas dire « nous », autant que « je »? C'est la question qu'on en vient à se poser, en craignant déjà pour sa stabilité.

Tout à son désir de vouloir parler de soi comme d'une entité bien réelle, l'individu singulier que nous prétendons être déchante alors. Il ne se voit plus que comme un sas entre l'anonymat des foules et le magma où gît son moi profond — une zone tampon entre la masse intimidante de la réalité et le halo inconsistant de ses désirs. L'identité qu'il secrète, depuis l'enfance, lui paraît une construction, plus qu'une réalité; c'est l'adresse avec laquelle il a pioché dans ses « 7 familles » pour constituer son « jeu », se présenter comme l'héritier de tel ancêtre ou de telle foi, de telle province ou de telle culture plutôt que de tel autre, ou mettre en valeur une origine déjà plus flatteuse — géographique ou sociale : c'est la manière qu'il a de se raconter ce *qu'il est*, en élimant telle période de vide ou de flottement pour mieux valoriser telle séquence, en occultant l'influence qu'a pu exercer sur lui tel être, ou telle forme de pensée; c'est sa façon de se décrire à autrui — puis à soi tel que l'imagine ou le redoute autrui, enfin à autrui tel que l'imagine ce *soi-même* déformé par lui — soit déjà quatre récits à la puissance n, eux-mêmes sujets à des variantes; c'est l'art, cohérent ou inventif, rigoureux ou délirant, qu'il déploie pour se rendre « lisible », mais aussi pour réduire ou justifier ses oscillations intimes, se convaincre qu'il aura été plus ou moins *le même* à travers le temps et l'espace, assurer une indispensable continuité à son être.

Or qui dit art dit aussi élaboration et esthétisation — donc en partie artifice; qui dit invention dit aussi affabulation, dans les cas limites. On doit se raconter pour se rendre connaissable, puis re-connaissable, mais il faut aussi forcer le trait pour donner à ce récit des couleurs, l'enrichir de synthèses flatteuses et d'épisodes pittoresques; comme les conteurs, nous brodons. En *creux*, lorsqu'on occulte inconsciemment tel aspect de *son* passé ou de son héritage, comme le romancier coupe les scènes qui affaiblissent ses personnages. *En plein*, lorsqu'on préfère délibérément falsifier tel fait, ou inventer tel autre.

L'identité qu'on se prête pourrait donc relever de la fiction, autant que de la biographie : elle serait la nouvelle — la tragédie, l'opéra, ou la pièce de boulevard aussi bien — que chacun écrit, selon son tempérament ou sa philosophie, sur la page blanche qui l'a vu naître, puis qu'il ne cesse d'amender avec le même aplomb et la même imagination parfois — mais aussi les mêmes périodes de découragement —, qu'un auteur met à bâtir son intrigue. L'étude de la vie encourage l'écriture de romans dont l'intrigue et les caractères nourrissent en retour la façon dont chacun envisage sa destinée : « Je suis ce que je me raconte », avance Ricœur dans *Soi-même comme un autre*, en ajoutant que ni le début ni la fin de l'histoire n'est de notre ressort : nous n'écrivons jamais que les chapitres médians d'une « œuvre » dont le déroulement nous échappe largement.

Claude ARNAUD, *Qui dit je en nous?*, Ed. Grasset, 2006.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2017

Épreuve d'anglais

Durée : 2h

L'épreuve est constituée de deux parties : un résumé et une traduction. Vous rédigerez ces deux parties sur **deux copies séparées**, sur lesquelles vous indiquerez « Anglais / résumé » et « Anglais / traduction ».

1 Summarize this text in English in 200 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

The rise of the cashless city: 'There is this real danger of exclusion'
Adapted from The Guardian, Monday 9 January 2017.

Scrolling through my online bank statements at Christmas, I was surprised to find I had not removed cash from an ATM for well over four months. Thanks to the ubiquity of electronic payment systems, it has become increasingly easy to glide around London to a chorus of approving bleeps.

As more shops and transport networks adapt to contactless card and touch-and-go mobile technology, many major cities around the world are in the process of relegating cash to second-class status. Some London shops and cafes are now, like the capital's buses, simply refusing to handle notes or coins.

Could we see a whole city go cash-free? From Seoul to Bergamo, cities big and small are at the forefront of a global drive to go digital. Many of us are happy to tap cards or phones to hop on a bus, buy a coffee or pay for groceries, but it raises the prospect of a time we no longer carry any cash at all.

No spare change for the busker at the station, the person sleeping rough in need of a hot drink, the market trader, the donation box. Although even on-street charity fundraisers are now broaching the world of contactless payments, what might the rise of the cashless city mean for street vendors, small merchants and the poorest inhabitants?

Some experts now fear a two-tier urban realm in which those on the lowest incomes become disconnected from mainstream commercial life by their dependence on traditional forms of currency.

"The beauty of cash is that it's a direct and simple transaction between all kinds of different people, no matter how rich or poor," explains financial writer Dominic Frisby. "If you begin to insist on cashlessness, it does put pressure on you to be banked and signed up to financial system, and many of the poorest are likely to remain outside of that system. So there is this real danger of exclusion."

Ajay Banga, Mastercard's CEO, has spoken about the growing global risk of "creating islands, where the unbanked transact [only] with each other".

In India, the question of how the poorest might connect with the digitised world of the middle-class consumer is now of central importance. In November, the prime minister Narendra Modi announced the removal of 500 and 1000 rupee notes from circulation. Part of a wider attempt to jolt the nation into joining the cashless revolution, Modi's government believes restricting currency and pushing the take-up of electronic payment will help tackle corruption and regulate India's untaxed, "black" economy.

Saurabh Shukla, the Delhi-based editor in chief at NewsMobile Asia, says he has seen many small "mom and pop" store owners introduce card readers and learn how to use Paytm, a mobile payment platform, over the past two months.

"They realise a big change is here and they are trying to adjust to electronic payment," he explains. "But they still want to convert back to cash at the end of the working day or the working week. It will be a gradual adjustment. We might not be able to create a completely cashless India, but we can aim to create a low cash economy."

Modi is encouraging state government to create "smart" cities by connecting their public services with the latest online technology. Yet huge queues remain outside banks as many Indians continue to demand cash. Some of the poorest street vendors cannot afford card readers, and have struggled to operate Paytm payment transfers on their mobile phones.

Aires Rodrigues, a human rights lawyer in Goa, says traders in Panjim are suffering. Rickshaw drivers and fish market sellers have been left with no way of accepting payment from middle-class customers now inclined to do everything digitally. “It’s senseless to try to make everyone go cashless,” says Rodrigues. “The government seems to have lost sight of the plight of the common man.”

If India’s urbanites are being forced to undergo digital shock therapy, city dwellers in much of Europe have been moving steadily away from cash. Consumers like convenience. Governments like the idea of tax transparency. And retailers like cutting down on the costs of cash handling.

According to a recent report by Fung Global Retail & Technology, nine of the top 15 “most digital-ready” countries are in Europe. It predicts Sweden could become the world’s first completely cashless society. Niklas Arvidsson at Stockholm’s KTH Royal Institute of Technology thinks it could happen by 2030.

Yet even Sweden has seen an enthusiasm gap emerge, mostly along demographic lines. Older people in the rural north, tending to be the least tech-savvy, resent the economic power of Stockholm and Gothenburg, now almost entirely cash-free urban zones. The National Pensioners Organisation is a key player in the “Cash Uprising” coalition now campaigning to make sure older Swedes can still deposit and remove cash from banks.

Wealth, however, remains the key factor in determining who might be entirely left behind by the evolving digital economy. Some of the poorest people in Europe’s richest cities have found themselves pushed aside.

Kenya may offer a guiding light here, having found a way to allow unbanked citizens access into the cashless society using cheap mobiles. Launched in 2007, M-Pesa has become the world’s leading mobile money platform, allowing millions of users to transfer money to each other by sending text messages and store their funds digitally without opening a conventional bank account.

In Zimbabwe, last year’s cash liquidity crisis led to renewed distrust in the banks and helped mobile money platforms take off as an alternative way of doing business, first in the capital city Harare, then in rural areas. The country’s most popular text-based service EcoCash now has more than six million users.

Dave Birch, director of innovation at UK firm Consult Hyperion, thinks it would be foolish to insist on clinging on to cash on behalf of the poor. “If you keep people trapped in a cash economy, you leave them to pay higher prices for everything, you leave them struggling to access credit, and more vulnerable to theft,” he says.

“We’re going to replace cash with electronic platforms,” Birch adds. “I don’t think poverty or being unbanked is necessarily a barrier, because everyone has a phone. Given the technology we have, we can develop new ways of moving digital cash around, even on the most basic of phones.”

The challenge for banks, regulators, tech innovators and officials keen to push forward “smart city” initiatives, is to make sure evolving platforms are accessible and keep everyone interconnected.

2 Translate the following text into French

Students call for Bristol University tower to change name

Students at the University of Bristol have launched a campaign to rename one of the city's most iconic buildings over its alleged links to slavery.

The campaigners claim the Wills Memorial Tower "glorifies" the slave trade due to its namesake, Henry Overton Wills III, Bristol's founding chancellor.

Mr Wills was the first official chancellor of the university and used profits from his tobacco trade investments to fund Bristol's royal charter. The tower was dedicated to him by his two sons after his death.

The student protestors argue the building undermines the university's commitment to "diversity and inclusivity" and symbolises the "toleration" of former slave masters.

Should their campaign be successful, the tower will be renamed after "somebody the entire university population can be proud of".

Launching a petition, the student group said: "Every student who first attends Bristol cannot help but notice the grand prominence of Wills Memorial Building at the top of Park Street. However, few know the history behind the name… Wills is known best for being the first chancellor of the university; fewer people are aware that this position was granted to him after financing the university with slave-profited money. While we begrudgingly understand that Bristol has a historical connection to the slave trade, we find it hard to accept that the university still glorifies an individual who advocated such an immoral practice."

Responding to the petition, a spokesman for the university said "We have never sought to hide our association with the Wills family. We believe that it is important to be open and reflective about our history, and the city's historical connection to the slave trade.

"To us, it would seem disingenuous to seek to deny or cover up our relationship with the family. We would welcome the chance to discuss this further with the organisers of this petition."

Adapted from *The Independent*, Wednesday 29 March 2017.