Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2018

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x. On rappelle qu'un nombre entier naturel, au moins égal à 2, est dit premier s'il n'est divisible que par 1 et lui-même (donc 1 n'est pas premier).

On note $\mathscr{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ l'ensemble des nombres premiers. On rappelle aussi que tout entier naturel n, au moins égal à 2, se décompose, de façon unique à l'ordre des facteurs près, comme produit de nombres premiers c'est-à-dire qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$, $(p_1, p_2, \ldots, p_r) \in \mathscr{P}^r$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que :

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}.$$

Si a et b sont deux entiers naturels tels que $a \leqslant b$, la notation $\displaystyle\sum_{\substack{a \leqslant p \leqslant b \\ p \in \mathscr{P}}} \alpha_p$ désigne la somme des nombres α_p pour tous les entiers **premiers** p de l'intervalle entier $[\![a, b]\!]$. On définit de la même façon $\displaystyle\sum_{\substack{p \leqslant b \\ p \in \mathscr{P}}} \alpha_p$, $\displaystyle\prod_{\substack{a \leqslant p \leqslant b \\ p \in \mathscr{P}}} \alpha_p$, *etc.*

Par exemple, $\displaystyle\sum_{\substack{4 \leqslant p \leqslant 10 \\ p \in \mathscr{P}}} \alpha_p = \alpha_5 + \alpha_7$, ou $\displaystyle\prod_{\substack{p \leqslant 8 \\ p \in \mathscr{P}}} \alpha_p = \alpha_2 \times \alpha_3 \times \alpha_5 \times \alpha_7$.

Partie I - Préliminaires

On établit, dans cette partie, quelques résultats préliminaires, indépendants les uns des autres, qui seront utilisés par la suite.

1. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction continue, décroissante et positive de $[n_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$.

   (a) Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n \geqslant n_0}$ de terme général $\gamma_n = S_n - \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ est monotone et convergente.

   (b) En déduire, l'existence d'un réel, noté C, pour lesquels on a, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$:
   $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} = \ln \ln n + C + o(1).$$

   (c) Établir la convergence de l'intégrale $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2 t}\,\mathrm{d}t$ et en déduire la convergence de la série $\sum \frac{1}{k \ln^2 k}$.

2. Montrer que la série de terme général $\frac{\ln k}{k(k-1)}$ est convergente.

   On note $K = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln k}{k(k-1)}$ *sa somme.*

3. (a) Prouver, pour tout entier naturel n au moins égal à 2, l'inégalité :
   $$\sum_{k=2}^{n} \ln k \geqslant n \ln n - n + 1\,.$$

   (b) En déduire, quand n tend vers $+\infty$, l'estimation : $\ln n! = n \ln n + O(n)$.

4. (a) Soit λ un réel strictement positif. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence et l'unicité d'un réel $x > 0$ tel que $x \ln x - \lambda x = \ln n$. On note r_n cet unique réel.

   (b) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} r_n = +\infty$ puis établir l'équivalence $r_n \sim \frac{\ln n}{\ln \ln n}$.

5. On note, pour toute partie E de $\mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E_n l'ensemble des éléments de E inférieurs ou égaux à n, c'est-à-dire que $E_n = E \cap [\![1, n]\!]$, et l'on pose, pour tout entier naturel n non nul, $d_n(E) = \frac{1}{n} \operatorname{card}(E_n)$.

   Si la suite $(d_n(E))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, on note $d(E)$ sa limite et on dit que la partie E de $\mathbb{N}^*$ admet une densité égale à $d(E)$.

   (a) Montrer que les ensembles suivants possèdent une densité dont on donnera la valeur :

   i. Une partie F finie de $\mathbb{N}^*$.

   ii. L'ensemble $a\mathbb{N}^* := \{ka\,;\, k \in \mathbb{N}^*\}$ des multiples non nuls de l'entier $a \in \mathbb{N}^*$.

iii. L'ensemble $C := \{k^2\,;\, k \in \mathbb{N}^*\}$ des entiers non nuls qui sont des carrés.

(b) Soit E_1, E_2 deux parties **disjointes** de $\mathbb{N}^*$ possédant une densité. Les parties $\mathbb{N}^* \setminus E_1$ et $E_1 \cup E_2$ possèdent-elles une densité ? Et, si oui, que valent-elles ?

(c) L'application d est-elle une probabilité sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ muni de la tribu formée de toutes ses parties ?

6. (a) Justifier, pour tout entier naturel m non nul, l'inégalité : $2\binom{2m+1}{m} \leqslant 2^{2m+1}$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel r non nul, l'entier $\displaystyle\prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2r+1\\ p\in\mathscr{P}}} p$ divise l'entier $\binom{2r+1}{r}$ (le produit s'effectuant donc sur tous les entiers **premiers** de $]\!]r+1, 2r+1]\!]$).

(c) Établir, pour tout entier n au moins égal à 2, l'inégalité : $\displaystyle\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} p \leqslant 4^n$ (le produit s'effectuant donc sur tous les entiers **premiers** au plus égaux à n).

On raisonnera par récurrence forte et, ayant supposé l'inégalité vraie jusqu'au rang n, on examinera, en particulier, le cas où $n+1$ est un entier premier égal à $2r+1$.

On en déduit ainsi l'inégalité : $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \ln p \leqslant n \ln 4$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note, pour tout nombre premier p et tout entier $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$, $v_p(r)$ l'exposant de p dans la décomposition en nombres premiers de r, et on pose $v_p(1) = 0$.

Par exemple, puisque $300 = 2^2\,3\,5^2$, $v_2(300) = 2$, $v_3(300) = 1$, $v_5(300) = 2$ et $v_p(300) = 0$ si $p \notin \{2,3,5\}$.

Soit p un nombre premier. On note, pour tout entier naturel k non nul, α_k (resp. β_k) le nombre d'entiers $d \in [\![1, n]\!]$ tels que p^k divise d (resp. tels que $v_p(d) = k$).

Bien sûr, dès que k est assez grand, $\alpha_k = \beta_k = 0$.

(a) Prouver, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\alpha_k = \left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor$.

(b) Justifier l'égalité : $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\beta_k$.

(c) En déduire, en reliant β_k aux α_i, l'égalité : $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor$.

(d) En déduire l'encadrement : $\dfrac{n}{p} - 1 \leqslant v_p(n!) \leqslant \dfrac{n}{p-1}$ $\left(= \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{p(p-1)}\right)$.

8. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Prouver, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k + \varepsilon_n A_n.$$

9. Soit $(a_N)_{N\in\mathbb{N}*}$ une suite positive de limite $+\infty$ et $(b_N)_{N\in\mathbb{N}*}$ une suite bornée. Soit $(X_N)_{N\in\mathbb{N}*}$ une suite de variables aléatoires discrètes, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$. On suppose que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(X_N) = a_N + b_N$ et, quand N tend vers $+\infty$, $\mathbf{Var}(X_N) = O(a_N)$.

   (a) Justifier, pour tout entier N assez grand, l'inclusion entre événements :

$$\Big[\, \big|X_N - \mathbf{E}(X_N)\big| \leqslant \frac{1}{2}\, a_N^{2/3} \Big] \subset \Big[\, \big|X_N - a_N\big| \leqslant a_N^{2/3} \Big].$$

   (b) En déduire que

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}(\big|X_N - a_N\big| > a_N^{2/3}) = 0.$$

Partie II - Deux résultats asymptotiques

1. (a) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\ln n! = \sum\limits_{\substack{p\leqslant n \\ p\in\mathscr{P}}} v_p(n!) \ln p$.

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement :

$$\frac{\ln n!}{n} - K \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\in\mathscr{P}}} \frac{\ln p}{p} \leqslant \frac{\ln n!}{n} + \ln 4\,,$$

   où le réel K est défini dans la question **I** -2).

   (c) Conclure, quand l'entier n tend vers $+\infty$, à l'évaluation asymptotique

$$\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\in\mathscr{P}}} \frac{\ln p}{p} = \ln n + O(1).$$

2. On note χ l'application qui, à chaque entier $k \in \mathbb{N}^*$, associe 1 si k est premier (*i.e.* $k \in \mathscr{P}$) et 0 sinon.

   (a) En posant, pour tout pour tout entier naturel k non nul, $a_k = \chi(k)\,\dfrac{\ln k}{k}$, $A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$, en utilisant **I** - 8), établir, pour tout $n \geqslant 2$, l'égalité :

$$\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln k \ln(k+1)}\, A_k + \frac{A_n}{\ln n}.$$

   (b) Établir, quand l'entier k tend vers $+\infty$, l'égalité : $\dfrac{\ln(1+1/k)}{\ln k \ln(k+1)}\, A_k = \dfrac{1}{k\ln k} + O\big(\dfrac{1}{k\ln^2 k}\big)$.

   (c) En déduire, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'égalité :

$$\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p} = \ln\ln n + O(1).$$

Partie III

On note, pour tout entier naturel n non nul, $\omega(n)$ le nombre d'entiers **premiers** distincts qui divisent l'entier n. On a donc $\omega(2^5) = 1$, $\omega(2^2.5^3) = 2$, $\omega(2.5^2.11^5) = 3$, *etc.*

L'objet de la suite du problème est le contrôle asymptotique, en un certain sens, de la suite $\big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, dont la décomposition en nombres premiers est $n = \prod\limits_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$.

   On a donc $\omega(n) = r$.

   Prouver l'inégalité : $\omega(n) = r \leqslant \dfrac{\ln n}{\ln 2}$.

   (b) À l'aide de **I** -4) prouver la domination $\omega(n) = O\Big(\dfrac{\ln n}{\ln\ln n}\Big)$.

   On observera que $n \geqslant 2\prod\limits_{k=1}^{r-1}(2k+1)$ *puis on prouvera, pour un réel* λ *qu'on déterminera, l'inégalité :* $\ln n \geqslant (r-1)\ln(r-1) - \lambda(r-1)$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble $[\![1,N]\!]$ de la probabilité uniforme, et, pour tout $r \in [\![1,N]\!]$, on note $X_{N,r}$ la variable aléatoire suivante :

$$X_{N,r} : \begin{array}{ccc} [\![1,N]\!] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ d & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } r \text{ divise } d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array},$$

   et note $X_N = \sum\limits_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathcal{P}}} X_{N,p}$ (on effectue donc la somme sur tous les entiers p **premiers** de $[\![1,N]\!]$).

   On a donc, pour tout $n \in [\![1,N]\!]$, $X_N(n) = \omega(n)$.

   On note $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{Var}(Y)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire Y sur l'espace précédent (elles dépendent, bien sûr, de l'entier N).

   (a) Vérifier, pour tout $r \in [\![1,N]\!]$, l'égalité : $\mathbf{E}(X_{N,r}) = \dfrac{1}{N}\left\lfloor \dfrac{N}{r} \right\rfloor$.

   (b) Prouver l'égalité : $\mathbf{E}(X_N^2) = \mathbf{E}(X_N) + \sum\limits_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathcal{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \dfrac{1}{N}\left\lfloor \dfrac{N}{pq} \right\rfloor$.

   (c) En déduire, quand l'entier N tend vers $+\infty$, l'ordre de grandeur : $\mathbf{Var}(X_N) = O(\ln\ln N)$.

   (d) En déduire, à l'aide d'un résultat de la **partie I**, le résultat :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\operatorname{card}\Big\{n \in [\![1,N]\!]\,;\, \big|\omega(n) - \ln\ln N\big| > \big(\ln\ln N\big)^{2/3}\Big\} = 0.$$

   Ainsi, en examinant le cas où $N = 10^{99}$, *on peut s'attendre à ce que, « le plus souvent », un entier d'au plus* 100 *chiffres, possède entre* 3 *et* 8 *facteurs premiers distincts. Étonnant non ?*

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2018

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Dans tout l'énoncé, p désigne un nombre entier strictement positif et $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Pour toute matrice carrée $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on appelle *solution de l'équation de réplication de matrice A*, toute application $f : t \longmapsto \big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)\big)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$, dont les composantes $f_1, f_2, \dots, f_p$ sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\boxed{\forall\, i \in [\![1, p]\!],\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_i'(t) = \langle e_i - f(t), Af(t)\rangle\, f_i(t)} \tag{1}$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^p$ et $Af(t)$ le vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont la matrice-colonne dans la base canonique est la matrice-produit $A \times \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_p(t) \end{pmatrix}$.

L'objet du problème est d'étudier la trajectoire des solutions de (1) et en particulier leurs limites en $+\infty$.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Partie I : solutions de l'équation de réplication scalaire

Dans le cas où p est égal à 1, les matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ ne possèdent qu'un seul coefficient et l'équation (1) se réduit à une équation différentielle scalaire, dont l'étude fait l'objet de cette partie.

Soit a un nombre réel différent de 0.

On se propose de montrer que, pour tout réel $y \in]0,1[$, il existe une unique fonction x définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,1[$ vérifiant :

$$\begin{cases} x(0) = y \\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = a\big(x(t)\big)^2\big(1 - x(t)\big) \end{cases} \tag{2}$$

1. On note φ l'application définie sur $]0,1[$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = -\frac{1}{x} + \ln\Big(\frac{x}{1-x}\Big) \tag{3}$$

   a) Justifier que φ est une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$.

   b) Donner l'allure du graphe de φ.

   c) Les fonctions φ et φ^{-1} sont-elles lipschitziennes ?

2. a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et toute fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,1[$, exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^t \frac{f'(u)}{\big(f(u)\big)^2\big(1 - f(u)\big)}\,\mathrm{d}u$ à l'aide des fonctions φ et f, de t et de $f(0)$.

   b) Démontrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'unique fonction x définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,1[$, qui vérifie (2) est la fonction f_y donnée par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_y(t) = \varphi^{-1}\big(a\,t + \varphi(y)\big)\,.$$

3. On note $\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme.

   a) Démontrer que l'application Φ qui associe à tout élément y de $]0,1[$ la fonction f_y est une application continue de $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel normé $\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

   b) On note $\mathscr{S} = \{f_y\,;\ y \in]0,1[\}$.
   Justifier que $\mathscr{S}$ est une partie connexe par arcs de l'espace vectoriel normé $\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $\mathscr{S}$ est-elle une partie ouverte de $\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$? En est-elle une partie fermée ?

Partie II : étude du cas où $p = 2$

Dans cette partie, on suppose que p est égal à 2 et on note $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Soit $x_0 \in]0,1[$.

On admet qu'il existe une unique application $f : t \longmapsto \big(f_1(t), f_2(t)\big)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant (1) et telle que :

$$\begin{cases} f_1(0) = x_0 \\ f_2(0) = 1 - x_0 \end{cases} \tag{4}$$

1. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que g et sa dérivée g' admettent chacune une limite finie en $+\infty$.
   Démontrer que la limite de la dérivée g' en $+\infty$ est nécessairement nulle.
2. Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et H une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
   On considère une fonction $x : t \longmapsto x(t)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
   $$\forall\, t \in \mathbb{R},\ x'(t) = h(t)\, x(t)\,.$$
   a) Donner, pour tout $t \in \mathbb{R}$, une expression de $x(t)$ en fonction de $x(0)$ et deux valeurs de la fonction H.
   b) Que peut-on en déduire sur le signe de la fonction x si $x(0)$ n'est pas nul ?
3. a) Justifier, pour tout réel t, l'égalité :
   $$f_1'(t) + f_2'(t) = \langle f(t), Af(t)\rangle \big(1 - f_1(t) - f_2(t)\big)\,.$$
   b) Justifier que $f_1(t) + f_2(t)$ est égal à 1 pour tout réel t.
4. On suppose dans cette question que c est égal à d.
   a) Utiliser les résultats de la partie I pour exprimer f_1 à l'aide de la fonction φ.
   b) En déduire la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$ selon les valeurs de a et b.
5. On suppose dans cette question que a et d sont égaux et non nuls, et que b et c sont nuls, autrement dit
   $$A = a\, I_2 \quad \text{avec } a \neq 0\,.$$
   a) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
   $$f_1'(t) = a\, f_1(t)\big(1 - f_1(t)\big)\big(2f_1(t) - 1\big)\,.$$
   b) On suppose dans cette sous-question que x_0 est strictement supérieur à $\dfrac{1}{2}\cdot$
   i) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\dfrac{1}{2} < f_1(t) < 1\,.$
   ii) En déduire que $f_1(t)$ admet une limite quand t tend vers $+\infty$.
   iii) Trouver, selon le signe de a, la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
   c) Étudier la convergence de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$ dans le cas où $x_0 < \dfrac{1}{2}\cdot$

Partie III : inégalités de Pinsker

1. On considère la fonction K définie sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$ de $\mathbb{R}^2$ par :
   $$\forall\,(x,y) \in]0,1[\times]0,1[,\quad K(x,y) = x\ln\Big(\frac{x}{y}\Big) + (1-x)\ln\Big(\frac{1-x}{1-y}\Big) \tag{5}$$
   a) En utilisant la concavité de la fonction ln, démontrer que la fonction K est minorée. Est-elle majorée ?

b) Justifier que K est de classe C^1 sur $]0,1[\times]0,1[$ et calculer les dérivées partielles $\partial_1 K$ et $\partial_2 K$.

c) En déduire les points où la fonction K atteint sa borne inférieure.

d) Justifier l'inégalité :

$$x\ln\Big(\frac{x}{y}\Big)+(1-x)\ln\Big(\frac{1-x)}{1-y)}\Big)\geq 2(x-y)^2 \tag{6}$$

2. Pour toute partie D de $[\![1,p]\!]$ et tout vecteur $x=(x_1,x_2\dots,x_p)$ de $\mathbb{R}^p$, on note :

$$x_D=\begin{cases}\sum\limits_{i\in D} x_i & \text{si } D\neq\emptyset\\ 0 & \text{si } D=\emptyset\end{cases}$$

Soit $x=(x_1,x_2\dots,x_p)$ et $y=(y_1,y_2\dots,y_p)$ deux éléments de $\mathbb{R}_+^{*\,p}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^p x_i=\sum_{i=1}^p y_i=1\ .$$

On note $B_+=\{i\in[\![1,p]\!]\ /\ x_i>y_i\}$ et $B_-=\{i\in[\![1,p]\!]\ /\ x_i\leq y_i\}$.

a) Exprimer $\sum\limits_{i=1}^p |x_i-y_i|$ en fonction de x_{B_+} et y_{B_+}.

b) Justifier l'inégalité :

$$\sum_{i=1}^p x_i\ln\Big(\frac{x_i}{y_i}\Big)\geq x_{B_+}\ \ln\Big(\frac{x_{B_+}}{y_{B_+}}\Big)+(1-x_{B_+})\ln\Big(\frac{1-x_{B_+}}{1-y_{B_+}}\Big)\ .$$

c) En déduire l'inégalité, dite de Pinsker, qui généralise l'inégalité (6) :

$$\sum_{i=1}^p x_i\ln\Big(\frac{x_i}{y_i}\Big)\geq\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^p|x_i-y_i|\Big)^2 \tag{7}$$

Partie IV : Convergence vers un point de coordonnées strictement positives

On note $\Delta=\{(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R_+}^p\ /\ \sum\limits_{i=1}^p x_i=1\}$ et $\Delta^0=\{(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}_+^{*\,p}\ /\ \sum\limits_{i=1}^p x_i=1\}$.

Soit f une solution de l'équation de réplication (1) telle que $f(0)$ appartient à Δ^0, c'est-à-dire

$$\begin{cases}\forall\, i\in[\![1,p]\!],\ f_i(0)>0\\ f_1(0)+f_2(0)+\cdots+f_p(0)=1\end{cases}.$$

1. Justifier les deux assertions :

a) $\forall\, t\in\mathbb{R},\ \sum\limits_{i=1}^p f_i(t)=1$.

b) f est à valeurs dans Δ^0 .

On suppose désormais qu'il existe un vecteur $x^*=(x_1^*,x_2^*\dots,x_p^*)\in\Delta^0$ tel que :

$$\forall\, x\in\Delta\setminus\{x^*\},\quad\langle x^*-x,Ax\rangle>0 \tag{8}$$

2. On note Q la fonction définie sur définie sur l'ouvert $]0,1[^p$ de $\mathbb{R}^p$ par :

$$\forall\, x = (x_1, x_2 \ldots, x_p) \in]0,1[^p, \quad Q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^* \ln\Big(\frac{x_i^*}{x_i}\Big) \tag{9}$$

   a) Justifier que $Q(x)$ est positif ou nul pour tout $x \in \Delta^0$.
   b) Justifier que x^* est l'unique élément x de Δ^0 tel que $Q(x) = 0$.
   c) Pour tout $x \in \Delta^0$, justifier les inégalités :

$$Q(x) \leq \sum_{i=1}^{p} \frac{x_i^*}{x_i}(x_i^* - x_i) \leq \frac{1}{\min\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}} \Big(\sum_{i=1}^{p}(x_i - x_i^*)^2\Big)^{1/2}.$$

3. a) Justifier que la fonction composée $Q \circ f$ est de classe C^1 et exprimer sa dérivée à l'aide de f, A et x^*.
   b) En déduire que $Q \circ f$ admet une limite positive ou nulle ℓ en $+\infty$.

4. On suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif ε tel que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ f_i(t) \geq \varepsilon \tag{10}$$

   a) Justifier, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}(f_i(t) - x_i^*)^2 \geq \varepsilon^2 \ell^2$.
   b) Justifier que, pour tout réel strictement positif α, il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in \Delta, \quad \Big(\langle x - x^*, x - x^* \rangle \geq \alpha\Big) \Longrightarrow \Big(\langle x^* - x, Ax \rangle \geq \beta\Big).$$

   c) En déduire, en raisonnant par l'absurde, que la limite ℓ de $Q \circ f$ en $+\infty$ est nulle.
   d) Démontrer que $f(t)$ tend vers x^* quand t tend vers $+\infty$.

5. Un exemple

   Dans cette question, on suppose $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   a) Justifier l'existence d'un unique vecteur x^* vérifiant (8) et le trouver.
   b) Démontrer que la fonction $t \longmapsto f_1(t) f_2(t) f_3(t)$ est croissante.
   c) Justifier que $f(t)$ tend vers x^* quand t tend vers $+\infty$.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2018

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h

Le sujet se compose d'un exercice et d'un problème dont les différentes parties peuvent, dans une certaine mesure, être traitées de manière indépendante, quitte à admettre les résultats des parties précédentes. La qualité de la rédaction et la précision des réponses apportées entrent pour une part importante dans la notation. Les réponses absurdes sont pénalisées.

Problème

Dans tout le problème, n désigne un nombre entier, et l'on suppose que $n \geq 2$. On considère n variables aléatoires notées $X_1, \dots, X_n$, avec les hypothèses suivantes :

(α) Pour tout $1 \leq k \leq n$, la variable X_k ne peut prendre comme valeur que 0 ou 1.

(β) Pour tout $1 \leq k \leq n$, on a $0 < \mathbb{P}(X_k = 1) < 1$.

(γ) Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Dans la suite, on notera, pour tout $1 \leq k \leq n$:

$$p_k = \mathbb{P}(X_k = 1), \qquad q_k = 1 - p_k, \qquad r_k = \frac{p_k}{q_k}.$$

Etant donné deux entiers naturels a et b, on utilisera dans la suite la notation $[\![a, b]\!]$ pour désigner l'ensemble des entiers j tels que $a \leq j \leq b$ (ainsi $[\![a, b]\!]$ correspond à l'ensemble vide si l'on a $a > b$).

Partie I – Calculs avec les fonctions génératrices

Pour tout nombre réel $t \in [0, +\infty[$, et tout nombre entier $j \in [\![1, n]\!]$, on définit

$$g_j(t) = \mathbb{E}\left(t^{X_j}\right),$$

en posant par convention que $0^0 = 1$. On définit également, pour $j \in [\![0, n-1]\!]$ la variable aléatoire S_j par

$$S_j = \sum_{k=j+1}^{n} X_k. \tag{1}$$

On pose en outre

$$G_j(t) = \mathbb{E}\left(t^{S_j}\right),$$

toujours avec la convention que $0^0 = 1$.

1) Montrer que l'on a, pour tout $t \in [0, +\infty[$, et $j \in [\![1, n]\!]$, l'identité :

$$g_j(t) = q_j + p_j t. \tag{2}$$

2) En déduire que l'on a, pour tout $t \in [0, +\infty[$, et $j \in [\![0, n-1]\!]$, l'identité :

$$G_j(t) = \prod_{k=j+1}^{n} q_k(1 + r_k t). \tag{3}$$

3) A partir de (3), obtenir une expression explicite pour la dérivée $G_j'(t)$ et montrer que

$$G_j'(0) = \left(\prod_{k=j+1}^{n} q_k\right)\left(\sum_{k=j+1}^{n} r_k\right). \tag{4}$$

4) Montrer que l'on a l'identité :

$$\mathbb{P}(S_j = 1) = G_j'(0). \tag{5}$$

5) Donner une expression de l'espérance $\mathbb{E}(S_j)$ (à partir de l'expression de G_j, ou en revenant à la définition de S_j).

6) Donner une expression de la variance $\mathbb{V}(S_j)$ (à partir de l'expression de G_j, ou en revenant à la définition de S_j).

Partie II – Probabilité de s'arrêter au dernier succès

Dans cette partie, on considère un entier $s \in [\![0, n-1]\!]$, et l'on note T_s la variable aléatoire définie de la manière suivante :

$$T_s = \min\left\{j \in [\![s+1, n]\!] \mid X_j = 1\right\},$$

avec par convention $T_s = n$ s'il n'existe aucun entier $j \in [\![s+1, n]\!]$ pour lequel $X_j = 1$.

Lorsque les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ représentent les résultats (1 = succès, 0 = échec) de n expériences successives, la variable aléatoire T_s correspond donc à l'indice du premier succès strictement postérieur à s lorsqu'un tel succès existe, et prend la valeur n sinon.

On introduit maintenant l'événement A_s défini par :

$$A_s = \left\{X_{T_s} = 1 \text{ et } X_j = 0 \text{ pour tout } j \in [\![T_s+1, n]\!]\right\}.$$

L'événement A_s correspond donc au fait qu'il existe un succès strictement postérieur à s, celui-ci étant de plus le dernier succès de la séquence $X_1, \ldots, X_n$.

7) Petit exemple : on suppose que $n = 5$ et que les valeurs effectivement réalisées des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_5$ sont les suivantes : $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 0, X_5 = 0$. Dans cette situation, quelles valeurs les variables aléatoires $T_0, \ldots, T_4$ prennent-elles ? Parmi les événements $A_0, \ldots, A_4$, quels sont ceux qui sont réalisés ?

8) Montrer que, pour tout $s \in [\![0, n-1]\!]$, on a l'identité $\mathbb{P}(A_s) = \mathbb{P}(S_s = 1)$.

9) On considère un entier $s \in [\![0, n-2]\!]$. Montrer que l'on a l'inégalité $\mathbb{P}(A_s) \leq \mathbb{P}(A_{s+1})$ si et seulement si l'on a l'inégalité $\sum_{k=s+2}^{n} r_k \geq 1$.

Indication : Faire appel aux questions précédentes, en notant aussi que $\left(\frac{q_{s+1}}{1-q_{s+1}}\right) r_{s+1} = 1$.

10) On suppose que l'on a $\sum_{k=2}^{n} r_k \geq 1$, et l'on pose

$$s_n^* = \max\left\{ s \in [\![1, n-1]\!] \;\middle|\; \sum_{k=s+1}^{n} r_k \geq 1 \right\}.$$

(a) Montrer que s_n^* est bien défini (comme max. d'un ensemble d'entiers fini non-vide).

(b) Montrer que la suite $(u_m)_{m=1,\ldots,n}$ définie par $u_m = \sum_{k=m}^{n} r_k$ est décroissante.

(c) Montrer que, pour tout $s \in [\![1, s_n^*]\!]$, on a $\sum_{k=s+1}^{n} r_k \geq 1$.

(d) Montrer que, pour tout $s \in [\![0, s_n^*-1]\!]$, on a $\mathbb{P}(A_s) \leq \mathbb{P}(A_{s+1})$.

(e) Montrer que, pour tout $s \in [\![s_n^*+1, n-1]\!]$, on a $\sum_{k=s+1}^{n} r_k < 1$.

(f) Montrer que, pour tout $s \in [\![s_n^*, n-2]\!]$ on a $\mathbb{P}(A_s) \geq \mathbb{P}(A_{s+1})$.

(g) En déduire que la probabilité $\mathbb{P}(A_s)$ est maximale pour $s = s_n^*$, parmi les différentes valeurs de $s \in [\![0, n-1]\!]$ possibles.

11) On suppose maintenant que l'on a $\sum_{k=2}^{n} r_k < 1$. Montrer que la probabilité $\mathbb{P}(A_s)$ est maximale pour $s = 0$.

12) On suppose que toutes les probabilités p_i sont égales : il existe un nombre $p \in]0, 1[$ telle que $p_1 = \cdots = p_n = p$. Exprimer la valeur de s_n^* en fonction de n et p (en distinguant éventuellement différents cas).

13) Donner une expression de $\mathbb{E}(T_s|A_r)$ et de $\mathbb{E}(T_s|A_r^c)$ en fonction de n et des paramètres p_j, q_j, r_j. (On note A_r^c l'événement complémentaire de A_r.)

Partie III – Records d'une permutation aléatoire

On rappelle qu'une permutation des entiers de 1 à n est une bijection de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$ sur lui-même, autrement dit, une application $\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ telle que, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, il existe un et un seul $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(i) = j$. Dans cette partie, on note $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des permutations des entiers de 1 à n, et l'on rappelle que cet ensemble comporte $n!$ éléments. On considère ensuite une permutation aléatoire Θ uniformément distribuée sur $\mathscr{S}_n$, autrement dit, Θ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathscr{S}_n$ vérifiant, pour tout $\sigma \in \mathscr{S}_n$, l'identité $\mathbb{P}(\Theta = \sigma) = \frac{1}{n!}$.

Etant donné un entier $1 \leq i \leq n$, on introduit l'événement R_i défini par

$$R_i = \{\Theta(i) > \Theta(j) \text{ pour tout } j \in [\![1, i-1]\!]\}.$$

On définit ensuite Y_i comme la variable aléatoire indicatrice de l'événement R_i, autrement dit : $Y_i = 1$ lorsque R_i se réalise, et $Y_i = 0$ dans le cas contraire.

On admettra sans preuve les deux propriétés (remarquables !) suivantes :

(a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\mathbb{P}(Y_i = 1) = 1/i$.

(b) Les variables aléatoires $Y_1,\ldots,Y_n$ sont mutuellement indépendantes.

On pose dans la suite de cette partie $X_i = Y_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

14) L'une des hypothèses effectuées au début du problème n'est pas vérifiée, avec la définition des $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ posée ci-dessus. Laquelle ?

On admettra que, malgré l'hypothèse non-vérifiée identifiée à la question précédente, le résultat de la question 10) demeure néanmoins valable.

15) Montrer que l'événement A_r coïncide avec l'événement $\{\Theta(T_r) = n\}$.
16) Exprimer la valeur de $\sum_{k=2}^{n} r_k$ dans le cas étudié dans cette partie, et justifier que l'on se trouve dans le cas de la question 10).
17) Montrer que, pour tout couple d'entiers a et b tels que $2 \leq a \leq b$, on a :

$$\ln\left(\frac{b+1}{a}\right) \leq \sum_{\ell=a}^{b} 1/\ell \leq \ln\left(\frac{b}{a-1}\right).$$

Indication : Comparer la somme $\sum_{\ell=a}^{b} 1/\ell$ avec l'intégrale de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur des intervalles appropriés.
18) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{s_n^*}{n} = 1/e. \tag{6}$$

Indication : Utiliser la définition de s_n^* afin d'obtenir deux inégalités pour lesquelles on peut utiliser la question 17).
19) Voici un contexte d'application possible pour les résultats précédents [1]. On dispose d'une liste de n candidatures sur un poste à pourvoir. Les candidat(e)s passent un entretien individuel visant à mesurer leur aptitude vis-à-vis du poste, mais la contrainte suivante est imposée : à l'issue de chaque entretien individuel, une réponse immédiate (recrutement ou refus) doit être donnée à la personne ayant passé l'entretien, si bien que le recrutement s'achève

1. Ou, du moins, une motivation pratique justifiant l'étude de ce type de modèle. Il ne s'agit pas d'une application réaliste.

dès qu'une réponse positive a été donnée à un(e) candidat(e). On suppose que le nombre n de candidatures disponibles est élevé, et la procédure retenue pour mener le recrutement est la suivante : dans une première phase, on fait passer un entretien à un nombre s (fixé à l'avance) de candidat(e)s, qui ne recevront de toute façon pas de réponse positive. Dans une seconde phase, on procède à des entretiens avec les autres candidat(e)s, en donnant une réponse positive dès le premier entretien montrant une aptitude supérieure à l'ensemble des entretiens qui l'ont précédé (ce qui inclut les s entretiens de la première phase, plus les précédents entretiens de la seconde phase), et l'on arrête alors de faire passer des entretiens. Enfin, dans le cas où les entretiens ont continué jusqu'à la n-ème candidature, celle-ci est de toute façon retenue.

(a) Quels peuvent être les inconvénients liés à un choix de s trop faible ?

(b) Quels peuvent être les inconvénients liés à un choix de s trop élevé ?

(c) En supposant que les aptitudes successives des candidat(e)s soient ordonnées selon une permutation aléatoire uniformément distribuée, que suggèrent les résultats précédents quant au choix du s permettant de maximiser la probabilité de recruter la candidature présentant la plus grande aptitude parmi les n disponibles ?

(d) Quelles critiques formuleriez-vous vis-à-vis de la procédure de recrutement envisagée ? Quelle autre procédure (respectant la contrainte d'une réponse immédiate après l'entretien) proposeriez-vous ?

(e) Quelles critiques formuleriez-vous vis-à-vis du modèle probabiliste adopté ?

Exercice

La loi de Gumbel est caractérisée par la fonction de répartition F suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = e^{-e^{-x}}$.

A) Vérifier que la formule ci-dessus possède bien les propriétés qui caractérisent une fonction de répartition continue :

(1) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$;

(2) F est croissante ;

(3) F est continue.

B) Montrer que la loi de Gumbel est associée à une fonction de densité, dont on donnera l'expression.

C) Donner un équivalent simple de $1 - F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

D) Montrer que, si U suit la loi uniforme sur $]0,1[$, la variable aléatoire définie par $G = -\ln(-\ln(U))$ suit la loi de Gumbel. On rappelle la densité de la loi uniforme sur $]0,1[$: $f(x) = 0$ pour $x \notin]0,1[$, et $f(x) = 1$ pour $x \in]0,1[$.

E) Etant donné un entier $N \geq 1$, on considère N variables aléatoires i.i.d. $X_1, \ldots, X_N$ suivant chacune la loi de Gumbel. Montrer que la variable aléatoire Z définie par

$$Z = \max(X_1, \ldots, X_N) - \ln N$$

suit également la loi de Gumbel.

Indication : Passer par la fonction de répartition de Z.

F) On considère une suite de variables aléatoires i.i.d. $(Y_n)_{n\geq 1}$ suivant chacune la loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$. Montrer que l'on a, pour tout $x \geq 0$, la convergence suivante :

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\max(Y_1, \ldots, Y_N) - \ln N \leq x\right) = e^{-e^{-x}}.$$

On rappelle la densité de la loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$: $f_{\mathscr{E}(1)}(x) = 0$ pour $x < 0$, et $f_{\mathscr{E}(1)}(x) = e^{-x}$ pour $x \geq 0$.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2018

Épreuve de français

Durée : 2h

Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas, c'est-à-dire, le plus grand*, comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé. Le candidat doit indiquer sur sa copie les tranches de 50 mots ainsi que le nombre total de mots utilisés.

Maintenant, que les cultures soient en droit égales signifie-t-il qu'elles le sont en fait, et qu'à travers la différence de leurs orientations respectives se sont créées les conditions d'un certain équilibre ? Non, sans doute. Il ne peut par exemple y avoir d'équilibre entre une culture qui développe, au moins dans le cadre de certaines fonctions sociales spécialisées, et à l'aide des dispositifs d'enregistrement et de communication les plus performants, les formes les plus sophistiquées, réfléchies ou formalisées de la rationalité, et une culture dont les mythes transmis oralement constituent l'architecture principale. La faiblesse du mythe réside dans son efficacité même. Les mythes expliquent le pourquoi de l'univers et l'ordre de la nature, constituent la place qu'y occupe l'homme, justifient les règles de la vie collective (...), il n'y a cependant aucun sens à les *discuter* ; discutés, ils perdent leur efficacité, qui dépend du crédit sans réserve accordé à leur sens. (...) Au contraire, les lois scientifiques sont par principe proposées à la corroboration expérimentale, et les théories scientifiques à des critiques ; au moins autant qu'elle cherche à dire le vrai, la pensée scientifique traque le faux sans jamais pouvoir se satisfaire entièrement des constructions déjà réalisées. La science est ainsi, peut-on dire, recherche plutôt que possession de la vérité, et c'est précisément dans cette mesure que l'expansion du savoir scientifique n'est pas destinée à trouver de terme. On ne doit pas inférer de là que le surgissement de la pensée scientifique doive détruire, là où il a lieu, toutes les structures de la pensée mythique, à laquelle la première ne laisserait ni rôle ni possibilité de subsistance. On ne supposera même pas que la première, toujours collective et largement institutionnalisée, aille de pair avec une ouverture *éthique* au monde d'autrui ou à l'altérité comme telle, supérieure à celle que peuvent montrer les représentants des cultures « primitives ». Mais tout progrès de la rationalité de type scientifique s'accompagne d'un gain de possibilités de domination – l'investissement explicite de la pensée dans des fins de domination ayant d'ailleurs de longtemps précédé en Europe la révolution scientifique du XVIIe siècle.

Aussi bien le déséquilibre dont il s'agit n'est-il pas simplement celui qui oppose les grands empires aux petites sociétés tribales. On peut derechef en prendre pour exemple la conquête de l'Amérique, où les Conquistadores semblent avoir mieux réussi à intégrer les aspects de la réalité aztèque susceptibles d'avoir pour eux de l'importance, que les Aztèques à intégrer le monde des Espagnols. Selon T. Todorov, il faut en l'occurrence évoquer l'intérêt prédominant des Aztèques pour la communication avec la nature ou avec les dieux, et leur peu de souplesse et d'ouverture dans la communication avec les hommes. A la même époque en revanche, les Espagnols s'intéressaient moins à la communication avec les instances transcendantes qu'à l'interprétation et à l'utilisation des signes humains. Leur culture avait en quelque sorte un « programme » de lecture « ouvert » qui leur permettait d'intégrer — en l'occurrence à des fins d'abord pragmatiques et nullement « humanistes » — les signes provenant d'autres cultures, quand les Aztèques avaient au contraire un « programme de lecture » fermé qui, au lieu de les inciter à découvrir le sens « propre » du comportement et de l'invasion des Espagnols, les reconduisait au système séculaire des significations de leur monde théocratique. Les Aztèques eurent ainsi tendance à traiter les Espagnols comme des dieux, et les Espagnols à traiter les Aztèques comme des bêtes.

Le genre humain a aujourd'hui cessé de se découvrir en extension. Non seulement l'exploration de la planète est achevée, mais la communication entre ses divers points a atteint, du point de vue matériel ou technique, un degré de rapidité, de fiabilité, de systématicité qu'il est encore permis de trouver stupéfiant. Cette transformation matérielle, dont les conséquences sur la vie des hommes sont d'autant plus considérables qu'elles se conjuguent avec d'autres espèces de transformations induites par la technique, est issue d'une souche culturelle déterminée, qui est, il est vrai, irréductible à une simple tradition (il s'agit plutôt d'une tradition de remise en cause de la tradition), et s'est montrée susceptible d'être transplantée loin au-delà de son aire d'origine. Sur le plan proprement culturel, ces conséquences sont contrastées. D'un côté, avec l'importance partout acquise par le « support » télévisuel, il faut faire état de la diffusion planétaire d'une « culture de masse » produite industriellement, et qui tend à imposer partout une mémoire élémentaire, un imaginaire et des modèles de comportement rigoureusement stéréotypés. D'un autre côté, les révolutions de la communication ont multiplié les possibilités d'ouverture sur les cultures étrangères, et rendent même, en certaines régions du monde du moins, la conscience et l'acceptation des cultures plus générales qu'elles n'ont jamais été. La manière dont, depuis le début du XXe siècle, l'art européen — musique aussi bien que peinture ou sculpture — a su et voulu intégrer des formes originaires d'autres régions du monde symbolisait d'avance les virtualités du métissage et la nécessité moderne de l'intercommunication. L'information « en temps réel » sur les conflits qui persistent ou se créent dans telle ou telle région du monde élargit les préoccupations de chacun à des maux qui autrefois auraient été difficilement connus ; elle favorise les réactions de l' « opinion publique internationale » dans une mesure qui fait du contrôle de cette information un enjeu stratégique d'une importance jamais égalée. La relation des hommes entre eux, à l'intérieur de chaque région du monde ou à l'échelle de la planète, en est-elle profondément transformée ? Le « genre humain » se réalise-t-il comme tel dans une plus grande mesure qu'à d'autres moments de l'histoire ?

Ici encore, le diagnostic sera contrasté. L'époque de l'action humanitaire est aussi celle du repli identitaire. Le mouvement vers la communauté planétaire se double partout — non seulement dans les parties les plus démunies ou les plus désorganisées du monde, mais dans le monde occidental lui-même — d'un mouvement à rebours qui vise au contraire à promouvoir et à consolider, sous une forme aisément raciste, et sans remise en cause des discriminations sociales et sexuelles, les particularismes de toutes sortes, supposés pourvus de valeur par eux-mêmes, sinon érigés en source de toute valeur. En raison notamment de conditions macro-économiques impitoyables, il faut admettre avec Lévi-Strauss que les conditions de la tolérance réciproque — « d'une part, une égalité relative, de l'autre une distance suffisante » — sont choses que « les sociétés contemporaines sont plus éloignées que jamais de connaître » (...) La préoccupation humanitaire, la sympathie pour les cultures étrangères à la nôtre sont des dispositions qui peuvent relever pour nous d'une sorte d'évidence ; savoir comment faire vivre ce que les stoïciens ont appelé, pour faire de sa conservation le plus général de tous les devoirs, la « société universelle du genre humain », cela en revanche pourrait bien constituer désormais la plus cruciale de toutes les questions.

Max MARCUZZI, *Le genre humain*, in Notions de Philosophie, 1995.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2018

Épreuve d'anglais

Durée : 2h

L'épreuve est constituée de deux parties : un résumé et une traduction. Vous rédigerez ces deux parties sur **deux copies séparées**, sur lesquelles vous indiquerez « Anglais / résumé » et « Anglais / traduction ».

1 Summarize this text in English in 200 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

Water shortages could affect 5bn people by 2050, UN report warns
The Guardian, Mon 19 Mar 2018.
Jonathan Watts in Brasília.

More than 5 billion people could suffer water shortages by 2050 due to climate change, increased demand and polluted supplies, according to a UN report on the state of the world's water.

The comprehensive annual study warns of conflict and civilisational threats unless actions are taken to reduce the stress on rivers, lakes, aquifers, wetlands and reservoirs.

The World Water Development Report – released in drought-hit Brasília – says positive change is possible, particularly in the key agricultural sector, but only if there is a move towards nature-based solutions that rely more on soil and trees than steel and concrete.

"For too long, the world has turned first to human-built, or 'grey', infrastructure to improve water management. In doing so, it has often brushed aside traditional and indigenous knowledge that embraces greener approaches," says Gilbert Houngbo, the chair of UN Water, in the preface of the 100-page assessment. "In the face of accelerated consumption, increasing environmental degradation and the multi-faceted impacts of climate change, we clearly need new ways of managing competing demands on our freshwater resources."

Humans use about 4,600 cubic km of water every year, of which 70% goes to agriculture, 20% to industry and 10% to households, says the report, which was launched at the start of the triennial World Water Forum. Global demand has increased sixfold over the past 100 years and continues to grow at the rate of 1% each year.

This is already creating strains that will grow by 2050, when the world population is forecast to reach between 9.4 billion and 10.2 billion (up from 7.7 billion today), with two in every three people living in cities.

Demand for water is projected to rise fastest in developing countries. Meanwhile, climate change will put an added stress on supplies because it will make wet regions wetter and dry regions drier.

Drought and soil degradation are already the biggest risk of natural disaster, say the authors, and this trend is likely to worsen. "Droughts are arguably the greatest single threat from climate change," it notes. The challenge has been most apparent this year in Cape Town, where residents face severe restrictions as the result of a once-in-384-year drought. In Brasília, the host of the forum, close to 2m people have their taps turned off once in every five days due to a unusually protracted dry period.

By 2050, the report predicts, between 4.8 billion and 5.7 billion people will live in areas that are water-scarce for at least one month each year, up from 3.6 billion today, while the number of people at risk of floods will increase to 1.6 billion, from 1.2 billion.

In drought belts encompassing Mexico, western South America, southern Europe, China, Australia and South Africa, rainfall is likely to decline. The shortage cannot be offset by groundwater supplies, a third of which are already in distress. Nor is the construction of more dams and reservoirs likely to be a solution, because such options are limited by silting, runoff and the fact that most cost-effective and viable sites in developed countries have been identified.

Water quality is also deteriorating. Since the 1990s, pollution has worsened in almost every river in Africa, Asia and Latin America, and it is expected to deteriorate further in the coming two decades, mainly due to agriculture runoffs of fertiliser and other agrochemicals that load freshwater supplies with nutrients that lead to the growth of pathogens and choking algae blooms. Industry and cities are also a significant problem. About 80% of industrial and municipal wastewater is discharged without treatment.

Crucially, the report emphasises a shift away from watershed management towards a wider geographic approach that takes in land use in distant areas, particularly forests. Although farmers have long seen trees as a drain on water supplies, the authors recognise more recent studies that show vegetation helps to recycle and distribute water. This was apparent in the São Paulo drought of 2014-15, which the city's water authorities and scientists have linked to Amazon deforestation.

The key for change will be agriculture, the biggest source of water consumption and pollution. The report calls for "conservation agriculture", which would make greater use of rainwater rather than irrigation and regularise crop rotation to maintain soil cover. This would also be crucial to reverse erosion and degradation, which currently affects a third of the planet's land, a different UN study found last year.

Perhaps the most positive message of the report is that the potential savings of such practices exceed the projected increase in global demand for water, which would ease the dangers of conflict and provide better livelihoods for family farmers and poverty reduction.

Nature-based solutions can be personal – such as dry toilets – or broad landscape-level shifts in agricultural practices. The report contains several positive case studies that show how environments and supplies can improve as a result of policy changes. In Rajasthan, more than 1,000 drought-stricken villages were supported by small-scale water harvesting structures, while a shift back towards traditional soil preservation practices in the Zarqa basin in Jordan are credited with a recovery of water quality in local springs.

The authors stress the goal is not to replace all grey infrastructure, because there are situations where there is no other choice, for example in building reservoirs to supply cities with water. But they urge greater take-up of green solutions, which are often more cost-effective as well as sustainable. They also encourage more use of "green bonds" (a form of financing that aims to reward long-term sustainable investments) and more payments for ecosystem services (cash for communities that conserve forests, rivers and wetlands that have a wider benefit to the the environment and society).

Audrey Azoulay, the director-general of Unesco, which commissioned the report, noted two-thirds of the world's forests and wetlands have been lost since the turn of the 20th century – a trend that needs to be addressed. "We all know that water scarcity can lead to civil unrest, mass migration and even to conflict within and between countries," she said. "Ensuring the sustainable use of the planet's resources is vital for ensuring long-term peace and prosperity."

The World Water Forum is the biggest single gathering of policymakers, businesses and NGOs involved in water management. It is being held in the southern hemisphere for the first time, and is expected to draw 40,000 participants.

Among them are indigenous and other grassroots activists who believe the event is too close to government, agriculture and business. They are staging an alternative forum in Brasília that puts greater emphasis on community management of water as a free public resource.

2 Translate the following text into French

Climate change cases predicted to make a legal splash in 2018

A clutch of high-profile legal cases over responsibility for the effects of climate change will be fought out in courtrooms next year as claims stack up against both governments and some of the world's biggest oil and energy companies.

Lawsuits in the United States brought by young activists and several Californian cities are most likely to make waves, but legal action by a Peruvian farmer in Germany and Greenpeace in Norway could also cause ripples, said lawyers and academics.

"There is a trend towards more litigation around climate change, and probably the lack of political action in the United States may increase that trend," said Sophie Marjanac, a London-based lawyer at non-profit environmental law group ClientEarth.

Lawyers and campaigners are closely watching the looming legal battles they say could set the stage for fresh claims against major oil and industrial companies, and pressure governments to ramp up action on climate change.

With U.S. President Donald Trump and his cabinet members named as defendants, the Juliana v. United States case brought by 21 young activists from Oregon is set to be one of the most closely followed in 2018.

In the federal case, scheduled for trial in February, the plaintiffs hope to establish that the government's climate change policies have failed to protect their constitutional right to live in a habitable environment.

Lawyers and academics say Juliana builds on the groundbreaking Urgenda case brought by hundreds of Dutch citizens in 2015, which saw the government ordered by a district court to accelerate reductions of greenhouse gas emissions.

Elsewhere, a January judgment is expected in a case brought by Greenpeace Nordic and environmental group Nature and Youth against Norway, which they claim has breached its pledge to combat climate change by granting oil and gas exploration rights.

A successful ruling against a heavyweight corporate could potentially unleash a wave of similar claims, say case watchers, who reference long-running fights against tobacco, asbestos and pesticide manufacturers over harm to human health.

Adapted from *Reuters*, December 28, 2017.