Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Corrections

Rappel : Les corrigés sont proposés à titre informatif. N'hésitez pas à contribuer et proposer des améliorations en nous contactant : contact@ceas.fr.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Corrigé Session 2021

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve de mathématiques

Éléments de correction

Exercice 1 : une caractérisation de la loi géométrique

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et de même loi, toutes les deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$I(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega)), \quad M(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega)) \quad \text{et} \quad D(\omega) = M(\omega) - I(\omega).$$

Question 1.

Montrer que I et M sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{T})$.

Correction

I et M sont des variables aléatoires comme fonctions de variables aléatoires.

Question 2.

Dans cette question, on suppose que la loi commune de X et Y est géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pourra poser $q = 1 - p$.

Question 2. (a)

Reconnaître la loi de la variable I.

Correction

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\mathbb{P}(I \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k \wedge Y \geq k).$$

Or X et Y sont indépendantes et de même loi, donc :

$$\mathbb{P}(I \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k)^2.$$

X suivant une loi géométrique de paramètre p, et en posant $q = 1 - p$, on déduit :

$$\mathbb{P}(I \geq k) = q^{2(k-1)}.$$

Donc :

$$\mathbb{P}(I = k) = \mathbb{P}(I \geq k) - \mathbb{P}(I \geq k+1) = q^{2(k-1)}(1 - q^2).$$

Ainsi, $I \sim \mathscr{G}\left(1 - q^2\right)$.

Question 2. (b)

Calculer, pour tout $(i,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbb{P}([I=i] \cap [D=d])$ (qu'on pourra noter $\mathbb{P}(I=i, D=d)$).
On séparera les cas $d=0$ et $d>0$.

Correction

On note une coquille dans l'énoncé : le couple (i,d) est à prendre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

On a :

$$\mathbb{P}(I=i, D=d) = \mathbb{P}(I=i, M=d+i).$$

- Si $d=0$:
$$\mathbb{P}(I=i, M=i) = \mathbb{P}(X=i, Y=i) = \mathbb{P}(X=i)^2 = q^{2(i-1)}p^2.$$

- Si $d \neq 0$:
$$\mathbb{P}(I=i, M=d+i) = \mathbb{P}((X=i, Y=d+i) \vee (X=d+i, Y=i)) = 2\mathbb{P}(X=i, Y=d+i) = 2q^{d+2(i-1)}p^2.$$

Question 2. (c)

Déterminer la loi de la variable D.

Correction

Les événements $(I=i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ forment un système complet, donc :

$$\mathbb{P}(D=d) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(I=i, D=d).$$

En distinguant les deux cas précédents :

- Si $d=0$:
$$\mathbb{P}(D=0) = \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2(i-1)}p^2 = \frac{p}{1+q}.$$

- Si $d \neq 0$:
$$\mathbb{P}(D=d) = \sum_{i=1}^{+\infty} 2q^{d+2(i-1)}p^2 = \frac{2q}{1+q}.$$

Question 2. (d)

Vérifier que les variables I et D sont indépendantes.

Correction

En reprenant les valeurs obtenues ci-dessus, on vérifie que pour tous les couples $(i,d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(I=i, D=d) = \mathbb{P}(I=i)\mathbb{P}(D=d).$$

Les deux variables sont donc indépendantes.

Question 3.

Dans cette question, la loi commune de X et Y est inconnue et on suppose que les variables I et D sont indépendantes.
On note $b := \mathbb{P}(D = 0)$ et, pour tout entier naturel k non nul, $p_k = \mathbb{P}(X = k)$.
On suppose $p_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Question 3. (a)

Exprimer le réel b à l'aide de la famille $(p_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.

Correction

On a :

$$\mathbb{P}(D = 0) = \mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k^2.$$

Question 3. (ii)

Exprimer, pour tout entier naturel k, la probabilité $\mathbb{P}(I > k)$ à l'aide de la famille $(p_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.

Correction

On reprend le même calcul qu'au (2.b) :

$$\mathbb{P}(I > k) = \mathbb{P}(X > k \wedge Y > k).$$

Or X et Y sont indépendantes et de même loi, donc :

$$\mathbb{P}(I > k) = \mathbb{P}(X > k)^2 = \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2.$$

Question 3. (c)

Soit $k \in \mathbb{N}$. En calculant la probabilité $\mathbb{P}(I > k, D = 0)$, établir l'égalité :

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2 = b\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2.$$

Correction

On calcule de deux manières différentes $\mathbb{P}(I > k, D = 0)$:

- D'une part :

$$\mathbb{P}(I > k, D = 0) = \mathbb{P}(X = Y, X > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2.$$

- D'autre part, comme I et D sont indépendantes :

$$\mathbb{P}(I > k, D = 0) = \mathbb{P}(I > k)\,\mathbb{P}(D = 0) = b\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2.$$

On conclut donc que :

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2 = b\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2.$$

Question 3. (d) (i)

En déduire, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $(1-b)\,p_k = 2\,b\,\mathbb{P}\,(X>k)$.

Correction

On fait la différence des égalités ci-dessus pour k et $k-1$:

$$p_k^2 = b\,p_k\left(p_k + 2\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)\right) = b\,p_k\left(p_k + 2\mathbb{P}\,(X>k)\right).$$

Ce qui, puisque les p_k sont non nuls, peut se réécrire :

$$p_k(1-b) = 2b\mathbb{P}\,(X>k)\,.$$

Question 3. (d) (ii)

Calculer p_1 en fonction de b puis établir, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $p_{k+1} = \dfrac{1-b}{1+b}\,p_k$.

Correction

La formule ci-dessus, pour $k=1$, donne :

$$(1-b)\,p_1 = 2b(1-p_1),$$

c'est-à-dire :

$$p_1 = \frac{2b}{1+b}.$$

En reprenant ensuite cette formule pour k et $k-1$ et en les soustrayant, il vient :

$$(1-b)\,p_k = (1+b)\,p_{k+1}.$$

Question 3. (e)

En déduire que la loi commune des variables X et Y est géométrique de paramètre p_1.

Correction

Ainsi, la suite (p_k) est une suite géométrique. On en déduit que :

$$X \sim \mathscr{G}\left(\frac{1-b}{1+b}\right).$$

Exercice 2 : un calcul de $\zeta(2)$

On pose, pour tout entier naturel n, $C_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x$ et $D_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x$.

Question 1.

Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$C_n = (2n-1)(C_{n-1} - C_n).$$

On pourra écrire $\cos^{2n} x = \cos x \cos^{2n-1} x$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. On commence par écrire la différence des intégrales :

$$C_{n-1} - C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(x)) \cos^{2n-2}(x)\, dx.$$

En réécrivant $1 - \cos^2(x)$ sous la forme $\sin^2(x)$, on obtient :

$$C_{n-1} - C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^{2n-2}(x)\, dx.$$

On applique ensuite une intégration par parties avec :

$$u' = \sin(x)\cos^{2n-2}(x), \quad u = -\frac{\cos^{2n-1}(x)}{2n-1}, \quad v = \sin(x), \quad v' = \cos(x).$$

En intégrant, nous obtenons l'égalité souhaitée :

$$C_{n-1} - C_n = \frac{C_n}{2n-1}.$$

Question 2.

Établir, pour tout entier naturel n non nul, les égalités :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2}\, dx = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}.$$

Correction

La relation obtenue dans la question précédente implique immédiatement :

$$\frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}.$$

En conséquence, nous obtenons bien :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^{2n-2}(x)\, dx = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}.$$

Question 3.

Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$C_n = (2n-1)\, n\, D_{n-1} - 2n^2 D_n.$$

Correction

Pour établir cette relation, on applique une double intégration par parties sur l'expression de C_n. Ce procédé permet de faire apparaître les termes D_{n-1} et D_n, ce qui conduit à l'égalité :

$$C_n = (2n-1) n D_{n-1} - 2n^2 D_n.$$

Question 4.

En déduire, pour tout entier n non nul, l'égalité :

$$\frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n}\right).$$

Correction

En divisant l'égalité précédente par C_n, nous obtenons immédiatement :

$$\frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n}\right).$$

Ce résultat met en évidence une somme télescopique utile pour la suite de l'exercice.

Question 5.

Question 5. (a)

Justifier, pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la minoration :

$$\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}\, x.$$

Correction

On utilise le fait que la fonction sin est concave sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par la propriété de concavité, la courbe est toujours au-dessus de sa corde joignant les points $(0,0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$, ce qui entraîne la minoration :

$$\sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x.$$

Question 5. (b)

En déduire, pour tout entier naturel n, la majoration :

$$D_n \leqslant \frac{\pi^2}{4} \frac{C_n}{2n+2}.$$

Correction

En utilisant la minoration précédente dans l'expression de D_n, on obtient :

$$D_n \leqslant \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^{2n}(x)\, \mathrm{d}x.$$

Or, par les résultats obtenus précédemment, nous savons que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^{2n}(x)\, \mathrm{d}x = \frac{C_n}{2n+2}.$$

D'où la majoration souhaitée :

$$D_n \leqslant \frac{\pi^2}{4} \frac{C_n}{2n+2}.$$

Question 6.

Prouver l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Correction

On déduit de la majoration obtenue que :

$$\frac{D_n}{C_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

En sommant les égalités obtenues dans la question 4 et en appliquant un raisonnement de type somme téles-copique, nous obtenons après passage à la limite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2\frac{D_0}{C_0} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3 : trois preuves d'une égalité combinatoire

Question 1. Avec la fonction Beta

On pose, pour tout couple (n,p) d'entiers naturels,

$$B(n,p) = \int_0^1 t^n (1-t)^p \, \mathrm{d}t.$$

Question 1. (a)

Relier, pour tout couple $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, les réels $B(n,p)$ et $B(n+1,p+1)$. En déduire, pour tout couple $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, l'égalité :

$$B(n,p) = \frac{n!p!}{(n+p+1)!}.$$

Correction

On note une coquille dans l'énoncé : le couple (n,p) est à prendre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

On intègre par parties :

$$B(n,p) = \int_0^1 t^n (1-t)^p \, \mathrm{d}t.$$

En utilisant l'intégration par parties, on décompose l'intégrale comme suit :

$$B(n,p) = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} (1-t)^p \right]_0^1 + \int_0^1 p \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} (1-t)^{p-1} \, \mathrm{d}t.$$

Le terme entre crochets s'annule aux bornes 0 et 1, ce qui donne :

$$B(n,p) = \frac{p}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} (1-t)^{p-1} \, \mathrm{d}t = \frac{p}{n+1} B(n+1, p-1).$$

À partir de cette relation, on peut établir par récurrence que :

$$\forall k \leqslant p, \quad B(n,p) = p \cdot (p-1) \cdot \cdots \cdot (p-k+1) \cdot \frac{n!}{(n+k)!} B(n+k, p-k).$$

Pour $k = p$, on obtient :

$$B(n,p) = \frac{n!\,p!}{(n+p)!} B(n+p, 0).$$

Or, $B(n+p,0)$ est l'intégrale suivante :

$$B(n+p,0) = \int_0^1 t^{n+p} \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+p+1}}{n+p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+p+1}.$$

Ainsi, on conclut que :

$$B(n,p) = \frac{n!\,p!}{(n+p+1)!}.$$

Question 1. (b)

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Établir l'égalité

$$(\mathscr{E}) \qquad \frac{(m-1)!n!}{(m+n)!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{m+k}.$$

Correction

$$\frac{n!\,(m-1)!}{(n+m)!} = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

On utilise la formule du binôme de Newton pour développer $(1-t)^n$:

$$(1-t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k t^k.$$

Ainsi, l'intégrale devient :

$$\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{m-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k t^k\,\mathrm{d}t.$$

On intervertit la somme et l'intégrale (ce qui est permis car la somme est finie) :

$$\int_0^1 t^{m-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\int_0^1 t^{m-1+k}\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale d'une puissance de t est donnée par :

$$\int_0^1 t^{m-1+k}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{m+k}}{m+k}\right]_0^1 = \frac{1}{m+k}.$$

Ainsi, l'expression devient :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{1}{m+k}.$$

Question 2. Avec des différences finies

On note Δ l'application qui, à chaque suite réelle $u := (u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$, associe la suite

$$\Delta(u) := (u_{p+1}-u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}.$$

On définit récursivement Δ^n par $\Delta^0 = \mathrm{Id}$ et $\Delta^n = \Delta\circ\Delta^{n-1}$.

Question 2. (a)

Prouver, pour toute suite $u := (u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$, pour tout entier naturel n et tout entier $p\in\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$(\Delta^n(u))_p = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}u_{p+k}.$$

Correction

On montre par récurrence sur n la relation demandée.

- **Initialisation :** Pour $n=0$, soit $p\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\Delta^0(u)_p = u_p = \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}(-1)^k u_{p+k}.$$

- **Hérédité :** Supposons le résultat vrai à un certain rang $n \geq 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Delta^{n+1}(u)_p = \Delta^n(\Delta(u))_p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \Delta(u)_{p+k}.$$

En développant $\Delta(u)_{p+k} = u_{p+k+1} - u_{p+k}$, on obtient :

$$\Delta^{n+1}(u)_p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (u_{p+k+1} - u_{p+k}).$$

Après décalage d'indice et utilisation de la formule de Pascal, on montre que :

$$\Delta^{n+1}(u)_p = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} u_{p+k}.$$

La propriété est initialisée et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 2. (b)

En utilisant la suite $u := \left(\frac{1}{p}\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$, établir à nouveau l'égalité $(\mathscr{E})$.

Correction

Prenons la suite $u = \left(\frac{1}{p}\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$.

Par récurrence sur n, on obtient que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta^n(u)_p = \frac{(p-1)!\, n!}{(p+n)!} (-1)^n.$$

Par ailleurs, la question (2.a.) donne :

$$\Delta^n(u)_p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{1}{p+k}.$$

Ainsi on obtient l'égalité $(\mathscr{E})$.

Question 3. Par un raisonnement probabiliste

On rappelle la formule du crible suivante : si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right).$$

Question 3. (a)

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et B des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$. Établir l'égalité :

$$\mathbb{P}\left(B \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(B) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(B \cap A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap \cdots \cap A_{i_k}^c\right).$$

Correction

Posons $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. On a :

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}\left(B \cap A^c\right) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i^c\right).$$

On applique la formule du crible au dernier terme de la somme, et l'on obtient le résultat demandé.

Pour la suite de l'exercice

Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère une urne contenant une boule noire N, n boules blanches $B_1, \dots, B_n$, et $m-1$ boules rouges $R_1, \dots, R_{m-1}$. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à épuisement de l'urne.

On note B l'événement où la boule noire est tirée avant toutes les boules rouges, et A_i l'événement où la boule noire est tirée après la boule blanche B_i.

Question 3. (b)

Calculer la probabilité $\mathbb{P}(B)$.

Correction

Soit S l'ensemble des $(m+n)$-suites de valeurs distinctes dans $\{B_1, \dots, B_n, N, R_1, \dots, R_{m-1}\}$. Le cardinal de S est $(m+n)!$.

Soit T l'ensemble des suites où tous les R_i apparaissent après le N. Considérons l'application φ qui, à un élément s de S, associe l'élément s' de T obtenu en permutant N et le premier R_i de s s'il y a un R_i avant N, et s sinon.

L'application φ est surjective, et chaque élément de T admet m antécédents par φ (ceux que l'on obtient en permutant N avec chacun des R_i). D'après le lemme des bergers, on déduit que $\#S = m\#T$, donc :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{m}.$$

Question 3. (c)

Calculer la probabilité $\mathbb{P}\left(B \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$.

Correction

L'événement $B \cap A$ correspond aux cas où l'on tire toutes les boules blanches (il y a $n!$ façons de le faire), puis la boule noire, puis toutes les boules rouges ($(m-1)!$ façons). Le nombre total de façons d'effectuer le tirage est $(m+n)!$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \frac{(m-1)!\, n!}{(m+n)!}.$$

Question 3. (d)

Prouver que pour tout entier k et toute k-liste $(i_1, \dots, i_k)$,

$$\mathbb{P}\left(B \cap A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap \dots \cap A_{i_k}^c\right) = \frac{1}{m+k}.$$

Correction

On réitère la démarche du (3.b.) en considérant que les B_{i_j} sont des R, donc en faisant comme s'il y avait $m+k$ boules rouges. On obtient ainsi le résultat souhaité.

Question 3. (e) (i)

Déterminer le nombre de k-listes $(i_1,\ldots,i_k)$ telles que $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$.

Correction

Les k-suites de ce type sont en bijection avec les parties à k éléments d'un ensemble de n éléments. Elles sont donc au nombre de $\binom{n}{k}$.

Question 3. (e) (ii)

En déduire à nouveau l'égalité $(\mathscr{E})$.

Correction

On reporte les quantités trouvées ci-dessus dans la formule du (3.a.), et on retrouve alors l'égalité $(\mathscr{E})$.

Exercice 4 : une propriété des matrices symétriques

Soit, pour tout entier naturel n non nul, $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles colonnes de taille n, muni de sa structure euclidienne standard où le produit de deux matrices colonnes X et Y est défini par ${}^{t}XY$. Soit $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre n et symétriques.

On note, pour tout entier naturel n non nul et pour toute matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$,

$$R(A) = \left\{{}^{t}XAX\,;\,{}^{t}XX = 1\right\}.$$

On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonalement semblable à une matrice $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ (i.e. vérifiant l'égalité ${}^{t}PP = I_n$) pour laquelle $B = {}^{t}PAP$.

Question 1.

Soit $(A, B) \in S_n(\mathbb{R})^2$. On suppose que A est orthogonalement semblable à B. Prouver l'égalité :

$$R(A) = R(B).$$

Correction

Soit $(A, B) \in SO_n(\mathbb{R})^2$, et soit $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^T BP$. L'application $X \mapsto PX$ définit une bijection de $S(0,1)$ dans lui-même.

Donc :

$$R(B) = \{X^T BX \mid X^T X = 1\} = \{(PX)^T B(PX) \mid X^T X = 1\} = \{X^T P^T BPX \mid X^T P^T PX = 1\} = R(A).$$

Question 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A rangées dans l'ordre croissant, c'est-à-dire $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

Question 2. (a)

Prouver l'inclusion :

$$R(A) \subset [\lambda_1, \lambda_n].$$

Correction

A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée. Elle est donc orthogonalement semblable à $B = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit X telle que $X^T X = 1$. Alors :

$$X^T BX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1.$$

Donc $R(A) = R(B) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$.

Question 2. (b)

Établir l'égalité :

$$R(A) = [\lambda_1, \lambda_n].$$

Correction

Considérons l'application X définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$X : \theta \mapsto (\cos(\theta), 0, \ldots, 0, \sin(\theta))^T.$$

Elle est continue à valeurs dans $S(0,1)$. L'application $\theta \mapsto X(\theta)^T BX(\theta)$ est continue, vaut λ_1 en 0 et λ_n en $\dfrac{\pi}{2}$. Donc :

$$R(A) = R(B) = [\lambda_1, \lambda_n].$$

Question 2. (c)

Montrer que si la matrice A est de trace nulle, alors 0 est élément de $R(A)$. Dans le cas où $n = 3$, la réciproque est-elle vraie ?

Correction

$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Si $\operatorname{Tr} A = 0$, alors $\lambda_1 \leq 0$ et $\lambda_n \geq 0$. Donc $0 \in R(A) = [\lambda_1, \lambda_n]$.

La réciproque n'est pas toujours vraie. Par exemple, si $A = \operatorname{Diag}(-1, 0, 2)$, alors $0 \in R(A)$ mais $\operatorname{Tr} A = 1 \neq 0$.

Diagonale d'une matrice

On appelle diagonale d'une matrice $M := (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la liste $(m_{1,1}, m_{2,2}, \ldots, m_{n,n})$ de ses éléments diagonaux.

Question 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'on dispose d'une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ pour laquelle ${}^tPAP$ a pour diagonale $(\operatorname{Tr} A, 0, \ldots, 0)$ (où $\operatorname{Tr} A$ désigne la trace de A). Vérifier que $\operatorname{Tr} A$ est élément de $R(A)$.

Correction

Supposons que $P^T AP$ ait pour diagonale $(\operatorname{Tr} A, 0, \ldots, 0)$. Prenons X tel que $X = P^{-1}(1, 0, \ldots, 0)^T$. Alors :

$$(PX)^T A(PX) = \operatorname{Tr} A.$$

Donc $\operatorname{Tr} A \in R(A)$.

Question 4. (a)

Donner un exemple de matrice $A \in S_2(\mathbb{R})$ dont la trace n'est pas élément de $R(A)$.

Correction

Considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont $\dfrac{5}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$. Donc :

$$\operatorname{Tr} A = 4 \notin \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right] = R(A).$$

Question 4. (b)

Soit $A \in S_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{Tr} A \in R(A)$ si et seulement si $0 \in R(A)$.

Correction

Soit $A \in S_2(\mathbb{R})$ de valeurs propres λ_1 et λ_2. Alors $\operatorname{Tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$ et $R(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$. Ainsi :

$$\operatorname{Tr} A \in R(A) \Longleftrightarrow \lambda_1 \leq 0 \text{ et } \lambda_2 \geq 0,$$

ce qui est équivalent à $0 \in R(A)$.

Question 5.

Soit $A \in S_2(\mathbb{R})$. On suppose que $\operatorname{Tr} A \in R(A)$. Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice dont la diagonale est $(\operatorname{Tr} A, 0)$.

Correction

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Tr} A \in R(A)$. Alors $0 \in R(A)$ et $\det(A) \leq 0$. Considérons :

$$B = \begin{pmatrix} \operatorname{Tr} A & \sqrt{-\det(A)} \\ \sqrt{-\det(A)} & 0 \end{pmatrix}.$$

A et B sont symétriques et ont le même polynôme caractéristique. Elles sont donc orthogonalement semblables à la même matrice diagonale, et donc orthogonalement semblables entre elles.

Question 6.

Soit n un entier avec $n \geqslant 2$. On suppose que toute matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Tr} A \in R(A)$ est orthogonalement semblable à une matrice ayant pour diagonale $(\operatorname{Tr} A, 0, \ldots, 0)$.

Soit $A \in S_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Tr} A \in R(A)$.

Question 6. (a)

Justifier l'existence d'une matrice colonne $C \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, d'une matrice ligne $L \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et d'une matrice $B \in S_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles la matrice A est orthogonalement semblable à la matrice par blocs :

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Tr} A & L \\ C & B \end{pmatrix}.$$

Correction

Soit $A \in S_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Tr} A \in R(A)$. Soit X de norme 1 telle que $X^T AX = \operatorname{Tr} A$. On complète X en une base orthonormée. Soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de cette base. P est orthogonale, et $P^T AP$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Tr} A & L \\ C & B \end{pmatrix}.$$

Question 6. (b)

Que vaut $\operatorname{Tr} B$? En déduire que $\operatorname{Tr} B \in R(B)$.

Correction

Par conservation de la trace par similitude, $\operatorname{Tr} B = 0$. D'après la question (1.c.), on déduit que $\operatorname{Tr} B \in R(B)$.

Question 6. (c)

Conclure que la matrice A est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale $(\operatorname{Tr} A, 0, \dots, 0)$.

Correction

On applique à B la propriété supposée dans cette question : il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $Q^T BQ$ soit de diagonale nulle. Posons alors :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

$P \in O_{n+1}(\mathbb{R})$, et $P^T AP$ a pour diagonale $(\operatorname{Tr} A, 0, \dots, 0)$.

On a ainsi montré par récurrence que toute matrice A telle que $\operatorname{Tr} A \in R(A)$ est orthogonalement semblable à une matrice dont la diagonale est $(\operatorname{Tr} A, 0, \dots, 0)$.

Question 7.

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un réel a pour lequel la matrice A est orthogonalement semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à a.

Correction

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. La matrice $A - \dfrac{\operatorname{Tr} A}{n} I_n$ a une trace nulle. Elle est donc, d'après la question (5.c.), orthogonalement semblable à une matrice de diagonale nulle. Ainsi, A est orthogonalement semblable à une matrice dont tous les termes diagonaux sont égaux à $\dfrac{\operatorname{Tr} A}{n}$.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve de mathématiques

Éléments de correction

Partie 1 : Exemples de calcul explicite du reste

Question 1.

Rappeler pourquoi, lorsque la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, la suite de terme général $\sum_{k=n}^{\infty} u_k$ est convergente. Quelle est alors sa limite ?

Correction

Question 2.

Dans cette question, x désigne un nombre réel non nul, de signe quelconque.

Question 2. (a)

Démontrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est convergente. Quelle est sa somme ?

Correction

Les termes de la série $\sum \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ sont tous non nuls, donc on peut vérifier la convergence par application de la règle de d'Alembert :

$$\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{|x|^{2n}} = \frac{|x|^2}{(2n+1)(2n+2)} \to 0, \quad \text{et } 0 < 1.$$

Ainsi, $\sum \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ est une série convergente.

D'après les séries entières usuelles,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh(x).$$

Question 2. (b)

Établir, pour tout nombre entier strictement positif n, l'égalité :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2}}{(2n-2)!} \sinh(t)\, dt.$$

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction cosh est de classe C^{2n-1} sur $\mathbb{R}$ et $\cosh^{(2n-1)} = \sinh$.

D'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2}}{(2n-2)!}\sinh(t)\,dt &= \cosh(x) - \sum_{k=0}^{2n-2}\frac{\cosh^{(k)}(0)}{k!}x^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^{2j}}{(2j)!} - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{x^{2j}}{(2j)!} \\ &= \sum_{j=n}^{+\infty}\frac{x^{2j}}{(2j)!}.\end{aligned}$$

Question 2. (c)

Donner une expression similaire de $\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$, sous la forme d'une intégrale.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction cos est de classe C^{2n-1} sur $\mathbb{R}$ et $\cos^{(2n-1)} = (-1)^n \sin$.
D'après la formule de Taylor avec reste intégral et le développement en série entière de cos,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} &= \cos(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \\ &= \cos(x) - \sum_{i=0}^{2n-2}\frac{\cos^{(i)}(0)x^i}{i!} \\ &= (-1)^n\int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2}\sin(t)}{(2n-2)!}\,dt.\end{aligned}$$

Question 3. (a)

Démontrer que la série de terme général $a_n = \arctan\left(\frac{2n}{n^4+n^2+2}\right)$ est convergente.

Correction

Par équivalents simples usuels, $a_n \sim \dfrac{2}{n^3}$ puis $a_n = O(1/n^3)$.
Par comparaison à une série de Riemann (absolument convergente), $\sum a_n$ est une série convergente.

Question 3. (b)

Trouver un couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient :

$$\begin{cases} P(X) - Q(X) = 2X, \\ P(X)Q(X) = X^4 + X^2 + 1. \end{cases}$$

Correction

Factorisation :

$$X^4 + X^2 + 1 = (X^2+1)^2 - X^2 = (X^2+X+1)(X^2-X+1).$$

On pose $P = X^2 + X + 1$ et $Q = X^2 - X + 1$. Alors $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $PQ = X^4 + X^2 + 1$ et $P - Q = 2X$.

Question 3. (c)

Établir que, pour tout couple (x, y) de nombres réels positifs ou nuls, on a :

$$\arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) = \arctan(x) - \arctan(y).$$

Correction

Fixons $y \in \mathbb{R}_+$ et posons f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \arctan\frac{x-y}{1+xy} - \arctan(x) + \arctan(y).$$

Par opérations, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) &= \frac{1}{1+\dfrac{(x-y)^2}{(1+xy)^2}} \times \frac{(1+xy)-y(x-y)}{(1+xy)^2} - \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{1+y^2}{(1+xy)^2+(x-y)^2} - \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{1+y^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2} - \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} - \frac{1}{1+x^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $f(y) = 0$ et $\mathbb{R}_+$ est un intervalle. Par théorème, f est la fonction nulle, ce qui conclut.

Question 3. (d)

Déduire des deux questions précédentes que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \frac{\pi}{2} - \arctan(n^2-n+1).$$

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \geq n$. On calcule :

$$\begin{aligned}
a_k &= \arctan\frac{P(k)-Q(k)}{1+P(k)Q(k)} \\
&= \arctan(P(k)) - \arctan(Q(k)) \quad \text{(car } P(k), Q(k) \text{ sont positifs ou nuls)} \\
&= \arctan(Q(k+1)) - \arctan(Q(k)).
\end{aligned}$$

Ensuite, en sommant et en observant que $\arctan(n^2-n+1) \to \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty} a_k &= \sum_{k=n}^{\infty} \Big(\arctan(Q(k+1)) - \arctan(Q(k))\Big) \\
&= \frac{\pi}{2} - \arctan(Q(n)) \quad \text{(somme télescopique)} \\
&= \frac{\pi}{2} - \arctan(n^2-n+1).
\end{aligned}$$

Question 3. (e)

La série $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right)$ est-elle convergente ?

Correction

Fixons $y>0$. En faisant tendre x vers $+\infty$ dans

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \arctan\frac{x-y}{1+xy}=\arctan(x)-\arctan(y),$$

on obtient par unicité de la limite :

$$\arctan\frac{1}{y}=\frac{\pi}{2}-\arctan(y).$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, $n^2-n+1>0$ donc

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k=\arctan\frac{1}{n^2-n+1}.$$

Par équivalents simples usuels, $\sum_{k=n}^{\infty} a_k\sim\dfrac{1}{n^2}$.

Par comparaison de termes généraux positifs, la série $\sum\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ est convergente.

Partie 2 : Exemples d'évaluation asymptotique du reste

Question 4.

Soit $x\in\mathbb{R}$. Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln n}{n^x}$ est convergente si, et seulement si, x est strictement supérieur à 1.

Correction

Soit $x>1$. Posons $y=\frac{1+x}{2}$. Alors $y>1$ et, par croissance comparée, $\frac{\ln(n)}{n^x}=o(1/n^y)$. Par comparaison à un exemple de Riemann, on conclut que la série $\sum\frac{\ln(n)}{n^x}$ est convergente.

Soit $x\leq 1$. On a :

$$\forall n\geq 3,\quad 0\leq\frac{1}{n}\leq\frac{\ln(n)}{n^x}$$

Par comparaison avec la série harmonique divergente, on conclut que la série $\sum\frac{\ln(n)}{n^x}$ est divergente.

Question 5.

Dans cette question on suppose que le réel x est strictement supérieur à 1 et, pour tout entier n strictement positif, on note

$$r_n=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\ln k}{k^x}.$$

Question 5. (a)

Pour tout réel $a>0$, justifier l'égalité :

$$\int_a^{+\infty}\frac{\ln t}{t^x}\,dt=\frac{a^{1-x}(1+(x-1)\ln a)}{(x-1)^2}.$$

Correction

Soit $a > 0$. On pose $y = \frac{1+x}{2}$ avec $y > 1$ et $\frac{\ln(t)}{t^x} = o(1/t^y)$. Par comparaison avec un exemple de Riemann et par continuité de $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^x}$ sur $[a, +\infty[$, cette fonction est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Effectuons une intégration par parties avec :

$$u(t) = \ln(t), \quad v'(t) = \frac{-1}{(x-1)\,t^{x-1}}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x} dt &= \left[\frac{-\ln(t)}{(x-1)\,t^{x-1}}\right]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} \frac{-1}{(x-1)\,t^x} dt \\ &= \frac{\ln(a)}{(x-1)\,a^{x-1}} + \frac{1}{(x-1)^2 a^{x-1}}.\end{aligned}$$

Question 5. (b)

Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, la double inégalité :

$$\int_n^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x} dt \leq r_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x} dt.$$

Correction

Posons $f(t) = \frac{\ln(t)}{t^x}$ définie et dérivable sur $[3, +\infty[$ avec :

$$\forall t \geq 3, \quad f'(t) = \frac{1/t - x\ln(t)}{t^{x+1}}.$$

Puisque $0 < 1/x < 1$ et $\forall t \geq 3, \ln(t) > 1$, alors $f'(t) > 0$ donc f est décroissante sur $[3, +\infty[$.

Par croissance de l'intégrale et décroissance de f, on obtient :

$$\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t^x} dt \leq \frac{\ln(k)}{k^x}.$$

En sommant ces inégalités de $n-1$ à $+\infty$, on obtient un encadrement permettant d'appliquer le théorème des gendarmes :

$$r_n \sim \frac{\ln(n)}{(x-1)\,n^{x-1}}.$$

Question 5. (c)

En déduire que r_n est équivalent à : $\frac{\ln n}{(x-1)n^{x-1}}$ quand n tend vers l'infini.

Correction

D'après les questions précédentes, nous avons l'encadrement suivant :

$$\frac{(x-1)\ln(n)+1}{(x-1)^2 n^{x-1}} \leq r_n \leq \frac{(x-1)\ln(n-1)+1}{(x-1)^2 (n-1)^{x-1}}.$$

Par des équivalents simples, les suites majorantes et minorantes sont équivalentes à

$$\frac{(x-1)\ln(n)}{(x-1)^2 n^{x-1}} = \frac{\ln(n)}{(x-1)\,n^{x-1}}.$$

En divisant l'inégalité précédente par ce dernier terme (qui est strictement positif), on obtient un encadrement permettant d'appliquer le théorème des gendarmes. Les suites majorante et minorante convergent toutes deux vers 1, ce qui permet de conclure que

$$r_n \sim \frac{\ln(n)}{(x-1)n^{x-1}}.$$

Question 6.

On considère deux suites $v = (v_n)_{n\geq 0}$ et $w = (w_n)_{n\geq 0}$ à termes réels non nuls. On suppose que v_n est équivalent à w_n quand n tend vers l'infini et que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente.

On rappelle que, si tous les termes de la suite v sont positifs, alors :

- La série $\sum_{n\geq 0} w_n$ est convergente.
- $\sum_{k=n}^{\infty} w_k$ est équivalent à $\sum_{k=n}^{\infty} v_k$ quand n tend vers l'infini.

Question 6. (a)

Comme indiqué dans l'énoncé de la question suivante, pour notre contre-exemple, nous présenterons des suites indexées par $\mathbb{N}^*$.

On définit ainsi les suites v et w :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad w_n = v_n + \frac{1}{n}.$$

Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum v_n$ est convergente.

Raisonnons par l'absurde en supposant que la série $\sum w_n$ est convergente.

Alors, la série $\sum(w_n - v_n)$ est également convergente, ce qui implique la convergence de $\sum \frac{1}{n}$, une absurdité.

De plus, on a :

$$\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = o(v_n),$$

d'où $w_n \sim v_n$.

Ce couple de suites constitue donc le contre-exemple demandé.

Question 6. (b)

Montrer de même que, lorsque le signe des termes de v n'est pas constant, il est possible que la série $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ soit convergente mais que $\sum\limits_{k=n}^{\infty} w_k$ ne soit pas équivalent à $\sum\limits_{k=n}^{\infty} v_k$ quand n tend vers l'infini.

On pourra utiliser pour w la suite de terme général : $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n(n+1)}$

Correction

La suite w est déjà définie dans l'énoncé (sur $\mathbb{N}^*$). Définissons la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}.$$

Introduisons également la suite des restes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k}}.$$

La suite $\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)_{k\geq 1}$ est positive, décroissante et tend vers 0. On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées, qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |r_n| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}, \quad \text{d'où} \quad v_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Ensuite, observons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n = v_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

En sommant cette relation (de manière partiellement télescopique), on pose :

$$r'_n := \sum_{k=n}^{\infty} w_k = r_n + \frac{1}{n}.$$

Il en découle :

$$r'_n = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit que $r'_n \sim \frac{1}{n}$, tandis que r_n n'est pas équivalente à $\frac{1}{n}$ car elle est négligeable devant $\frac{1}{n}$.

Enfin, comme précédemment, on observe que $w_n \sim v_n$ car :

$$\frac{1}{n(n+1)} = o(v_n).$$

Pour la suite de l'exercice

Pour traiter la question qui suit, on pourra admettre la propriété suivante qui complète les propriétés rappelées précédemment.

Si v et w sont deux suites à termes positifs telles que $v_n = o(w_n)$ (v_n négligeable par rapport à w_n quand n tend vers l'infini) et si les séries $\sum_{n\geq 0} v_n$ et $\sum_{n\geq 0} w_n$ sont convergentes, alors :

$$\sum_{k=n}^{\infty} v_k = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} w_k\right).$$

Question 7.

Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $p(\in]0,1[)$, que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(>0)$ et que les variables X et Y sont indépendantes.

Correction

Dans les réponses à ces questions, posons $q = 1 - p$ et notons que $q \in]0,1[$ car $p \in]0,1[$.

Question 7. (a)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(X \geq n)$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$P(X \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=n}^{\infty} pq^{k-1} = \frac{pq^{n-1}}{1-q} = q^{n-1}.$$

De plus, on a $P(X \geq 0) = 1$ (ce qui n'est pas inclus dans le résultat précédent).

Question 7. (b)

Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$P(X+Y=n) = p(1-p)^{n-1} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{1-p}\right)^k.$$

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
L'événement $\{X+Y=n\}$ est la réunion disjointe des événements $\{X=k, Y=n-k\}$ pour k parcourant $[\![1,n]\!]$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}
P(X+Y=n) &= \sum_{k=1}^{n} P(X=k, Y=n-k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X=k)P(Y=n-k) && \text{(par indépendance)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} pq^{k-1} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} pq^{n-j-1} \frac{\lambda^j}{j!} && \text{(changement d'indice } j=n-k) \\
&= e^{-\lambda} p(1-p)^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{1-p}\right)^j.
\end{aligned}$$

Question 7. (c)

En déduire que $P(Y \geq n)$ est négligeable devant $P(X+Y \geq n)$ quand n tend versr l'infini.

Correction

D'après une série entière vue en cours,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{1-p}\right)^k \to e^{\frac{\lambda}{1-p}},$$

et cette limite est non nulle.
Calculons maintenant :

$$\begin{aligned}
\frac{P(Y=n)}{P(X+Y=n)} &\sim \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \times \frac{1}{p(1-p)^{n-1}e^{-\lambda}e^{\lambda/(1-p)}} \\
&\sim \frac{e^{-\lambda/q}q}{p} \times \frac{(\lambda/q)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Par conservation de limite et croissance comparée, on obtient $P(Y=n)=o(P(X+Y=n))$.

Les deux probabilités étant positives et termes généraux de séries convergentes, on en déduit par un théorème classique :

$$P(Y\geq n)=\sum_{k=n}^{\infty}P(Y=k)=o(P(X+Y\geq n)).$$

Question 7. (d)

Démontrer que : $P(X+Y\geq n)$ est équivalent à $\frac{e^{\lambda p/(1-p)}(1-p)^{n-1}}{1-p}$ quand n tend vers l'infini.

Correction

On a vu précédemment que :

$$P(X+Y=n)\sim p(1-p)^{n-1}e^{-\lambda}e^{\lambda/q}=p(1-p)^{n-1}e^{\frac{\lambda p}{1-p}}.$$

Comme les termes sont positifs et termes généraux de séries convergentes, on applique un théorème de sommabilité :

$$\begin{aligned}
P(X+Y\geq n)&=\sum_{k=n}^{\infty}P(X+Y=k)\\
&\sim\sum_{k=n}^{\infty}\mu(1-p)^{k-1} && \text{(en posant } \mu=pe^{\lambda p/(1-p)}\text{)}\\
&\sim\frac{\mu(1-p)^{n-1}}{p}\\
&\sim e^{\lambda p/(1-p)}(1-p)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Question 7. (e)

En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0}P(X+Y\geq n)$ est convergente. Quelle est sa somme ?

Correction

Par comparaison avec une série géométrique convergente (donc absolument convergente car $|1-p|<1$), on obtient la convergence de la série $\sum P(X+Y\geq n)$.

Retrouvons tout d'abord un résultat classique en posant $Z=X+Y$, qui est à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}P(Z>n)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}P(Z=k)\\
&=\sum_{0\leq n<k}P(Z=k)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{k-1}P(Z=k)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}kP(Z=k)\\
&=E(Z)\\
&=E(X)+E(Y) && \text{(linéarité de l'espérance)}\\
&=\frac{1}{p}+\lambda.
\end{aligned}$$

Les échanges de sommes sont justifiés par la théorie de la sommabilité (tous les termes sommés sont positifs ou nuls).

On peut maintenant calculer la somme demandée :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X+Y=n) = P(X+Y \geq 0) + \frac{1}{p} + \lambda = 1 + \frac{1}{p} + \lambda.$$

Partie 3 : Étude du reste comme opérateur

On note L_∞ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées et $\|\cdot\|_\infty$ la norme sur L_∞ définie par :

$$\forall u = (u_n)_{n\geq 0}, \quad \|u\|_\infty = \sup\{|u_n|; n \in \mathbb{N}\}.$$

Question 8.

Démontrer que l'espace vectoriel F des suites réelles convergentes et de limite nulle est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Correction

Soit $u \in F^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. On suppose que $u \to \ell$, c'est-à-dire que $\|u - \ell\|_\infty \to 0$.

Alors, la suite de fonctions $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{N}$ vers la fonction $\ell : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, $u(n)$ converge vers 0 par hypothèse.

Par le théorème de double limite, la fonction ℓ converge donc aussi vers 0, ce qui montre que $\ell \in F$ et permet de conclure.

Question 9.

On note E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\geq 0}$ telles que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

Question 9. (a)

Justifier que E est un sous-espace vectoriel de F.

Correction

Montrons que E est un sous-espace vectoriel de F.

Stabilité par addition :

Si $u, v \in E$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes. Par linéarité de la somme des séries, $\sum(u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n$ est convergente, donc $u + v \in E$.

Stabilité par multiplication par un scalaire :

Si $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\sum u_n$ est convergente. Or, $\sum(\lambda u_n) = \lambda \sum u_n$ est convergente, donc $\lambda u \in E$.

Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de F.

Question 9. (b)

L'ensemble E est-il une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$? Quelle est son adhérence ?

Correction

On a $E \subset F$, donc par passage à l'adhérence : $adh(E) \subset adh(F) = F$.
Soit $u \in F$. Vérifions que $u \in adh(E)$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons la suite $v(n)$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v(n)_k = \begin{cases} u_k & \text{si } k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par construction, $v(n) \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on a :

$$\|u - v(n)\|_\infty = \sup\{|u_k|, k \geq n+1\}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u \to 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq n_0$, $|u_k| \leq \varepsilon$.
Pour $n \geq n_0$, on a alors $\|u - v(n)\|_\infty \leq \varepsilon$.
Ainsi, $v(n) \to u$ dans L_∞, donc $u \in adh(E)$.
On en conclut que $adh(E) = F$.
En particulier, E n'est pas fermé, sinon on aurait $E = F$, ce qui contredirait la convergence de la série définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{1}{n+1}.$$

Question 10.

On note Φ l'application qui, à tout élément $u = (u_n)_{n\geq 0}$ de E associe la suite $r = (r_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k.$$

Question 10. (a)

Calculer $\|u\|_\infty$ et $\|\Phi(u)\|_\infty$ lorsque u est une suite géométrique convergente de premier terme u_0 égal à 1.

Correction

Soit $q \in]-1,1[$ la raison de la suite (u_n).
Comme $(|q^n|)$ est décroissante, on a $\|u\|_\infty = 1$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q}.$$

On en déduit :

$$\|\Phi(u)\|_\infty = \frac{1}{|1-q|} = \frac{1}{1-q}.$$

Question 10. (b)

Démontrer que Φ est une application linéaire et injective de E dans L_∞, dont l'image est F.

Correction

Soit $u \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n est bien défini et appartient à $F \subset L_\infty$ (cf. première question du sujet).

Donc Φ est bien définie de E dans L_∞ et son image est incluse dans F.

Soit $u \in \ker(\Phi)$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = r_n - r_{n+1} = 0 - 0 = 0.$$

Ainsi, Φ est injective.

Soit $v \in F$. Définissons :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = v_k - v_{k+1}.$$

D'après la relation série-somme, la série $\sum u_n$ converge et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=n}^{\infty} u_k = v_n - \lim v = v_n.$$

On a donc $v = \Phi(u)$ avec $u \in E$, ce qui achève la question.

Question 10. (c)

On note Ψ la restriction de Φ à E, considérée comme une bijection de E sur F. On munit E et F de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Question 10. (c) (i)

L'application Ψ est-elle continue ?

Correction

Supposons que Ψ soit continue. Alors, par linéarité, il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$\forall u \in E, \quad \|\Psi(u)\|_\infty \leq \lambda \|u\|_\infty.$$

En particulier, d'après la question précédente :

$$\forall q \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-q} \leq \lambda.$$

En faisant tendre q vers 1^-, on trouve une contradiction, donc Ψ n'est pas continue.

Question 10. (c) (ii)

L'application réciproque Ψ^{-1} est-elle continue ?

Correction

L'application Ψ^{-1} est définie de F dans E par :

$$\forall u \in F, \quad \Psi^{-1}(u) = (u_k - u_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}.$$

Ainsi, pour tout $u \in F$:

$$\|\Psi^{-1}(u)\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty,$$

ce qui montre que Ψ^{-1} est continue.

Partie 4 : Restes de séries alternées

Dans cette partie, f désigne une fonction dérivable sur $[0,+\infty[$, décroissante et convexe, à valeurs strictement positives et de limite nulle en $+\infty$.

On rappelle que si $v=(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite à termes réels strictemnet postifis, décroissante et de limite nulle, alors :

- la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n v_n$ est convergente
- pour tout $n\in\mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k v_k$ est positive si n est pair, négative si n est impair, et vérifie l'inégalité

$$|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k v_k|\leq v_n$$

Question 11.

Établir, pour tout réel positif ou nul t, la double inégalité :

$$0\leq \frac{f(t)-f(t+1)}{f(t)}\leq -\frac{f'(t)}{f(t)}.$$

Correction

Soit $t\in\mathbb{R}_+$. Par inégalité de convexité, on a :

$$f(t+1)\geq f'(t)(t+1-t)+f(t)$$

puis, en divisant par $f(t)>0$:

$$\frac{f(t+1)-f(t)}{f(t)}\geq \frac{f'(t)}{f(t)}.$$

Par décroissance de f, on obtient directement l'autre inégalité.

Question 12.

Pour tout entier positif ou nul n, on pose : $u_n=(-1)^n f(n)$.

Question 12. (a)

Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Correction

La suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, positive et converge vers 0.

Par le critère des séries alternées, la série $\sum(-1)^n f(n)$ est convergente.

Question 12. (b)

Pour tout entier positif ou nul n, on pose :

$$r_n=\sum_{k=n}^{\infty} u_k.$$

Démontrer que, pour tout entier positif ou nul n, on a :

$$(i) \quad |r_n| = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p f(n+p).$$

$$(ii) \quad 0 \leq |r_n| - |r_{n+1}| \leq f(n) - f(n+1).$$

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration de (i)

Par le critère spécial des séries alternées, r_n est du signe de $(-1)^n f(n)$, donc de celui de $(-1)^n$.

On a :

$$|r_n| = (-1)^n r_n = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{n+k} f(k).$$

En effectuant un changement d'indice $[k = n+p]$, on obtient :

$$|r_n| = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p f(n+p).$$

Démonstration de (ii)

Vérifions que la suite $(f(n+p) - f(n+p+1))_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante, positive et converge vers 0.

Le troisième point est une conséquence directe de la limite $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

La positivité découle de la décroissance de f.

Enfin, en utilisant la convexité de f, on obtient :

$$f(n+p+1) \leq \frac{f(n+p) + f(n+p+2)}{2}.$$

Ce qui donne :

$$f(n+p+1) - f(n+p+2) \leq f(n+p) - f(n+p+1).$$

D'après le critère spécial des séries alternées, on en déduit que :

$$|r_n| - |r_{n+1}| = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (f(n+p) - f(n+p+1))$$

est du signe de son premier terme et majoré (en valeur absolue) par ce dernier.

Question 12. (c)

Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} r_n$ est convergente.

Correction

La suite $(|r_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et converge vers 0 (suite des restes d'une série convergente).

De plus, r_n est du signe de $(-1)^n$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = (-1)^n |r_n|.$$

Par le critère des séries alternées, la série $\sum r_n$ est convergente.

Question 12. (d)

Démontrer que, si le quotient $\frac{f'(t)}{f(t)}$ tend vers 0 quand le réel t tend vers l'infini alors r_n est équivalent à $\frac{u_n}{2}$ quand n tend vers l'infini

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \geq n$, on a :

$$(-1)^k f(k) - (-1)^{k+1} f(k+1) = 2(-1)^k f(k) - (-1)^k (f(k) - f(k+1)).$$

En sommant de n à ∞, il vient :

$$(-1)^n f(n) - 0 = 2r_n - \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k (f(k) - f(k+1)).$$

On pose :

$$v_n = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k (f(k) - f(k+1)).$$

D'après le critère des séries alternées :

$$|v_n| \leq f(n) - f(n+1) \leq \frac{-f'(n)}{f(n)} f(n).$$

L'hypothèse faite sur f permet d'en déduire que $v_n = o(f_n)$.

Ainsi, on obtient :

$$r_n = \frac{(-1)^n f(n)}{2} + o(f(n)).$$

Ce qui donne l'équivalent asymptotique :

$$r_n \sim \frac{u_n}{2}.$$

Question 13. (a)

Pour quelles valeurs du réel x la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$ est-elle convergente ?

Correction

Pour $x > 1$, la série est absolument convergente, donc convergente.

Pour $x \in \,]0,1]$, la suite $\left(\dfrac{\ln(n)}{n^x}\right)_{n\geq 3}$ est décroissante (l'étude de la fonction a été faite plus haut), positive et converge vers 0 par croissance comparée. La série est donc convergente.

Pour $x \leq 0$, le terme général ne tend pas vers 0 (il diverge même vers $+\infty$), donc la série est grossièrement divergente.

Question 13. (b)

Pour ces valeurs, déduire des résultats précédents un équivalent de $\sum\limits_{k=n}^{\infty} (\frac{(-1)^k \ln k}{k^x}$ quand n tend vers l'infini.

Correction

Soit $x > 0$. Pour tout $t \geq 3$, on pose :
$$f(t) = \frac{\ln(t)}{t^x}.$$
Cette fonction est dérivable avec :
$$\forall t \geq 3, \quad f'(t) = \frac{1}{t^{x+1}} - \frac{x\ln(t)}{t^{x+1}} = \frac{1}{t^{x+1}}(1 - x\ln(t)).$$
De plus, nous avons :
$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{t\ln(t)} - \frac{x}{t} \to 0 \quad \text{quand } t \to +\infty.$$
La fonction f' est aussi dérivable, et son expression est :
$$\forall t \geq 3, \quad f''(t) = \frac{-x-1}{t^{x+2}}(1 - x\ln(t)) + \frac{1}{t^{x+1}}\frac{-x}{t}.$$
On peut réécrire :
$$f''(t) = \frac{x(x+1)}{t^{x+2}}\left(\ln(t) - \frac{1+2x}{x^2+x}\right).$$
En adaptant les résultats précédents, on montre que la restriction de f à $\left[\frac{1+2x}{x^2+x}, +\infty\right[$ est dérivable, convexe, décroissante, positive et tend vers 0 en $+\infty$, tout comme $\frac{f'(t)}{f(t)}$.

On en déduit :
$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k^x} \sim \frac{(-1)^n \ln(n)}{2n^x}.$$

Question 14. (a)

Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est convergente.

Correction

On effectue un développement limité :
$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + O(1/n^3).$$
Cela peut aussi s'écrire sous forme de différence :
$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + O(1/n^3).$$
Comme somme de termes généraux de séries convergentes, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est convergente.

Question 14. (b)

La série de terme général $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$ est-elle convergente ?

Correction

Pour tout $t \geq 1$, on pose :

$$f(t) = \frac{1}{t}.$$

Cette fonction est décroissante, dérivable, convexe, tend vers 0 en $+\infty$, et on a :

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{-1}{t} \to 0 \quad \text{quand } t \to +\infty.$$

D'après un résultat démontré plus haut, on a :

$$r_n := \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sim \frac{(-1)^n}{2n}.$$

En reprenant le développement limité de la question précédente et par sommation des $O(1/n^3)$ (cas convergent), on obtient :

$$\begin{aligned} w_n := \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k} &= r_n - \frac{1}{n} + O(1/n^2) \\ &= \frac{(-1)^n}{2n} + o(1/n) - \frac{1}{n} + O(1/n^2) \\ &= \frac{(-1)^n}{2n} + o(1/n) - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

On obtient alors l'équivalent simple :

$$\frac{1}{n} \sim \frac{(-1)^n}{2n} - w_n.$$

Comme $1/n > 0$, par conservation du signe strict, ces deux suites équivalentes sont de signe constant (strictement positif) à partir d'un certain rang.

En raisonnant par l'absurde et en supposant que $\sum w_n$ est une série convergente, on en déduit que $\sum \frac{1}{n}$ est une série convergente, ce qui est absurde.

La série $\sum w_n$ est divergente.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve de mathématiques

Éléments de correction

Problème I – Le facteur de Bayes

Introduction

Le résultat d'une expérience aléatoire est un réel r qui est vu comme la réalisation d'une variable aléatoire R. Pour une même expérience, la loi de la variable aléatoire R peut être définie de différentes manières. Choisir une loi pour R équivaut à choisir un modèle pour l'expérience aléatoire.

Face à ces différentes possibilités de modélisation, une question naturelle est de savoir a posteriori, c'est-à-dire après avoir pris connaissance du résultat de l'expérience, si un modèle A est préférable à un autre modèle B. Pour répondre à cette question, on peut calculer le facteur de Bayes défini par

$$f_{A,B} := \log_{10} p_A - \log_{10} p_B,$$

où p_A est la probabilité que $R = r$ sous le modèle A et p_B est la probabilité que $R = r$ sous le modèle B. La notation $\log_{10}$ correspond au logarithme décimal (base 10).

Évidemment, une valeur positive de $f_{A,B}$ suggère que le modèle A est préférable à B. Plus précisément, l'interprétation de la valeur $f_{A,B}$ est donnée dans le tableau suivant :

$f_{A,B}$	Décision
$< -\frac{1}{2}$	Le modèle B est préféré au modèle A.
$de - \frac{1}{2} à \frac{1}{2}$	On ne peut pas distinguer les deux modèles.
$> \frac{1}{2}$	Le modèle A est préféré au modèle B.

L'objectif de ce problème est d'appliquer cette méthode de décision sur une expérience simple : le "pile ou face".

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètres respectifs $q_1 \in]0,1[$ et $q_2 \in]0,1[$. On a donc $P([X_i = 1]) = q_i$ et $P([X_i = 0]) = 1 - q_i$ pour $i \in \{1,2\}$.

Question 1.

On introduit la variable aléatoire $S_2 = X_1 + X_2$. Déterminer l'ensemble E_2 des valeurs prises par la variable aléatoire S_2.

Correction

On a : $E_2 = \{0,1,2\}$

Question 2.

Pour tout $k \in E_2$, donner l'expression (en fonction de q_1 et q_2) la valeur de la probabilité $P([S_2 = k])$.

Correction

- On a $P([S_2 = 0]) = P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = (1 - q_1)(1 - q_2)$
- On a $P([S_2 = 1]) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0])) \cup P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) = q_2(1 - q_1) + q_1(1 - q_2)$
- On a $P([S_2 = 2]) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = q_1 q_2$

Question 3.

Calculer l'espérance et la variance de S_2.

Correction

Calcul de l'espérance

Première méthode

Par définition de l'espérance, on a :

$$E(S_2) = 0 \times P([S_2 = 0]) + 1 \times P([S_2 = 1]) + 2 \times P([S_2 = 2]) = q_2(1 - q_1) + q_1(1 - q_2) + 2q_1 q_2 = q_1 + q_2$$

Deuxième méthode

On remarque que l'espérance de la somme de deux variable aléatoire indépendantes est égale à la somme de leur espérances respectives. On a donc :

$$E(S_2) = E(X_1) + E(X_2) = q_1 + q_2$$

Calcul de la variance

Première méthode

Par définition de la variance, on a :

$$\begin{aligned} Var(S_2) &= E(S_2^2) - E(S_2)^2 \\ &= q_2(1 - q_1) + q_1(1 - q_2) + 4q_1 q_2 - (q_1 + q_2)^2 \\ &= q_1 + q_2 + 2q_1 q_2 - q_1^2 - q_2^2 - 2q_1 q_2 \\ &= q_1 + q_2 - q_1^2 - q_2^2 \\ &= q_1(1 - q_1) + q_2(1 - q_2) \end{aligned}$$

Deuxième méthode

On remarque que la variance de la somme de deux variable aléatoire indépendantes est égale à la somme de leur variances respectives. On a donc :

$$Var(S_2) = Var(X_1) + Var(X_2) = q_1(1 - q_1) + q_2(1 - q_2)$$

Question 4.

On considère à présent $n > 2$ variables aléatoires indépendantes $X_1, ..., X_n$ de loi de Bernoulli avec pour tout $i \in 1, \ldots, n, P([X_i = 1]) = q_i \in]0, 1[$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

En fonction de $q_1, \ldots, q_n$, donner les expressions de $P([S_n = 0])$ et $P([S_n = 1])$.

Correction

Calcul de $P([S_n = 0])$
Par définiton, on a :

$$P([S_n = 0]) = \prod_{i=1}^{n} P([X_i = 0]) = \prod_{i=1}^{n} (1 - q_i)$$

Calcul de $P([S_n = 1])$
De même, on a :

$$P([S_n = 0]) = \prod_{i}^{n} q_i$$

Question 5.

Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note $\mathbb{S}_k$ l'ensemble des vecteurs $(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k$ tels que $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$.
Donner en fonction de k et n le cardinal de l'ensemble $\mathbb{S}_k$.

Correction

On a :

$$Card(\mathbb{S}_k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Question 6.

Montrer que

$$P([S_n = 2]) = \sum_{(i_1, i_2) \in \mathbb{S}_2} q_{i_1} q_{i_2} \prod_{i_l \neq i_1, i_2} (1 - q_{i_l}).$$

Correction

On a :

$$\begin{aligned}
P([S_n = 2]) &= \sum_{(i_1, i_2) \in \mathbb{S}_2} P([X_1 \neq 1] \cap \ldots \cap [X_{i_1 - 1} \neq 1] \cap [X_{i_1} = 1] \cap \ldots \cap [X_{i_2 - 1} \neq 1] \cap [X_{i_2} = 1]) \\
&= \sum_{(i_1, i_2) \in \mathbb{S}_2} P([X_{i_1} = 1] \cap [X_{i_2} = 1] \cap [X_1 \neq 1] \cap \ldots \cap [X_{i_1 - 1} \neq 1] \cap \ldots \cap [X_{i_2 - 1} \neq 1]) \\
&= \sum_{(i_1, i_2) \in \mathbb{S}_2} q_{i_1} q_{i_2} \prod_{i_l \neq i_1, i_2} P([X_{i_l} \neq 1]) \\
&= \sum_{(i_1, i_2) \in \mathbb{S}_2} q_{i_1} q_{i_2} \prod_{i_l \neq i_1, i_2} (1 - q_{i_l})
\end{aligned}$$

Question 7.

Pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$, donner l'expression de $P([S_n = k])$.

Correction

Par calcul analogue à la question 6, on a :

$$P([S_n = k]) = \sum_{(i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{S}_k} \prod_{j=1}^{k} q_{i_j} \prod_{i_l \neq i_1, \ldots, i_k} (1 - q_{i_l}).$$

Question 8.

Dans le cas où $q_1 = \ldots = q_n$, simplifier l'expression de $P([S_n = k])$ obtenue à la question précédente. Quel nom donne-t-on à la loi de S_n dans ce cas ?

Correction

Si $q_1 = \ldots = q_n = q$, on a :

$$P([S_n = k]) = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\mathbb{S}_k} \prod_{j=1}^{k} q_{i_j} \prod_{i_l\neq i_1,\ldots,i_k} (1-q_{i_l}). \quad = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\mathbb{S}_k} \prod_{j=1}^{k} q \prod_{i_l\neq i_1,\ldots,i_k} (1-q). = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\mathbb{S}_k} q^k(1-q)^{n-k}. \quad = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$$

C'est donc une loi binomiale de paramètres n et q.

Le "pile ou face"

Prenons l'exemple de l'expérience aléatoire consistant à lancer n fois une pièce de monnaie et à compter le nombre de fois où l'on obtient le côté "pile". Le résultat r de cette expérience est la réalisation de la variable aléatoire R donnée par

$$R = S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ étant indépendantes et telles que $X_i = 1$ si le côté "pile" est obtenu au i-ème lancer et $X_i = 0$ sinon.

On compare les modélisations suivantes.

- Modèle $M_{1/2}$: la pièce est équilibrée et donc $P([X_i = 1]) = 1/2$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- Modèle M_q : la probabilité d'obtenir le côté "pile" est égale à $q \in]0, 1[$.

Question 9.

Donner l'expression de la probabilité $p_{1/2}(n, r) := P([S_n = r])$ lorsque la pièce est supposée équilibrée (modèle $M_{1/2}$).

Correction

On a :

$$p_{1/2}(n,r) = P([S_n = r]) = \binom{n}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-r} = \binom{n}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r \left(\frac{1}{2}\right)^{n-r} = \binom{n}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{=}\binom{n}{r} 2^{-n}$$

Question 10.

Pour tout $r \in \{0, \ldots, n\}$, donner l'expression de la probabilité $p_q(n, r) := P([S_n = r])$ lorsque l'on se place sous le modèle M_q. En déduire l'expression du facteur de Bayes

$$f_{1/2,q}(n, r) = \log_{10} p_{1/2}(n, r) - \log_{10} p_q(n, r).$$

Correction

On a :

$$p_q(n,r) = \binom{n}{r} q^r (1-q)^{n-r}$$

Par définition et en réduisant on a :

$$\begin{aligned} f_{1/2,q}(n,r) &= \log_{10} p_{1/2}(n,r) - \log_{10} p_q(n,r) \\ &= \log_{10} \frac{p_{1/2}(n,r)}{p_q(n,r)} \\ &= \log_{10} \frac{\binom{n}{r} 2^{-n}}{\binom{n}{r} q^r (1-q)^{n-r}} \\ &= \log_{10} \frac{2^{-n}}{q^r (1-q)^{n-r}} \\ &= \log_{10} 2^{-n} - r \log_{10} q - (n-r) \log_{10} (1-q) \end{aligned}$$

Question 11.

Dresser le tableau de variation de la fonction $q \mapsto f_{1/2,q}(n,r)$.

Correction

On dérive $g(q) = f_{1/2,q}(n,r)$, on a :

$$\begin{aligned} g'(q) &= \frac{-r}{q \ln(10)} + \frac{n-r}{(1-q)\ln(10)} \\ &= \frac{q(n-r) - r(1-q)}{q(1-q)\ln(10)} \\ &= \frac{nq - r}{q(1-q)\ln(10)} \end{aligned}$$

On sait que $q(1-q)\ln(10)$ est toujours positif.
D'où :

- Si $nq - r < 0$, c'est à dire que $q < \frac{r}{n}$, alors $g(q)$ est décroissante.
- De même, si $nq - r > 0$, c'est à dire que $q > \frac{r}{n}$, alors $g(q)$ est croissante

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{r}{n}$		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Question 12.

On introduit l'ensemble

$$\mathscr{D} = \left\{ q \in]0,1[\,\middle|\, -\frac{1}{2} \leq f_{1/2,q}(n,r) \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Pour tout $q \in \mathscr{D}$, que peut-on dire sur les modèles $M_{1/2}$ et M_q ? (utiliser la règle de décision du Tableau 1).

Correction

On ne peut pas distinguer les deux modèles.

Question 13.

Application numérique : Après $n = 200$ lancers, on obtient $r = 115$ fois le côté pile. L'ensemble $\mathscr{D}$ correspondant est $[0.483, 0.522] \cup [0.627, 0.664]$. Une personne vous assure qu'avec la pièce utilisée, la probabilité d'obtenir "pile" est 1.5 fois supérieure à celle d'obtenir "face". Qu'en pensez-vous ?

Correction

Il s'agit ici de comparer les modèles $M_{1/2}$ et M_q avec q tel que :

$$\begin{aligned}
& q = \frac{3}{2}(1-q) \\
\Leftrightarrow & \frac{5}{2}q = \frac{3}{2} \\
\Leftrightarrow & q = \frac{3}{5} \\
\Leftrightarrow & q = 0.6
\end{aligned}$$

Donc $q \notin D$. De plus, on sait d'après le tableau de variations que $f_{1/2}, 3/5(n, r) < -1/2$.

Donc on préfère le modèle $M_{3/5}$ c'est à dire le fait que la probabilité d'obtenir "pile" est 1.5 fois supérieure à celle d'obtenir "face".

Tester si une pièce était bien équilibrée : première méthode

Connaissant le résultat r de l'expérience, on souhaite s'assurer que la pièce utilisée était bien équilibrée. Pour ce faire, une première méthode consiste à comparer le modèle de la pièce équilibrée au modèle le plus vraisemblable a posteriori. Ce modèle (noté M_{opt}) est celui pour lequel $P([X_i = 1]) = \hat{q}(n, r)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$; la valeur $\hat{q}(n, r)$ est la probabilité $q \in [0, 1]$ maximisant la probabilité $P([S_n = r])$ obtenue sous le modèle $P([X_i = 1]) = q$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Question 14.

Calculer $\hat{q}(n, 0)$ et $\hat{q}(n, n)$. Donner l'expression de $\hat{q}(n, r)$.

Correction

La valeur $\hat{q}(n, r)$ est obtenue en maximisant :

$$\log_{10} P([S_n = r]) = \log_{10} \binom{n}{r} - r \log_{10} q - (n-r) \log_{10}(1-q)$$

En dérivant puis en annulant, on a :

$$
\begin{aligned}
&\frac{r}{q}-\frac{n-r}{1-q}=0\\
\Leftrightarrow &\frac{r}{q}=\frac{n-r}{1-q}\\
\Leftrightarrow &q(n-r)=r-rq\\
\Leftrightarrow &qn=r\\
\Leftrightarrow &q=\frac{r}{n}
\end{aligned}
$$

Ainsi, si $q=0$ alors $r=0$
D'où $\hat{q}(n,0)=0$ et $\hat{q}(n,n)=1$

Question 15.

Donner l'expression du facteur de Bayes

$$f_{1/2,\text{opt}}(n,r)=\log_{10} p_{1/2}(n,r)-\log_{10} p_{\text{opt}}(n,r),$$

où $p_{\text{opt}}(n,r):=P([S_n=r])$ lorsque l'on se place sous le modèle M_{opt}.

Correction

On a :

$$
\begin{aligned}
f_{1/2,\text{opt}}(n,r)&=\log_{10} p_{1/2}(n,r)-\log_{10} p_{\text{opt}}(n,r)\\
&=\log_{10}\frac{p_{1/2}(n,r)}{p_{\text{opt}}(n,r)}\\
&=\log_{10}\frac{2^{-n}}{\left(\frac{r}{n}\right)^r\left(1-\frac{n}{r}\right)^{n-r}}\\
&=\log_{10}\frac{n2^{-n}}{r^r(n-r)^{n-r}}
\end{aligned}
$$

Question 16.

Application numérique : en prenant les mêmes valeurs que dans la question I.5), calculer la valeur du facteur de Bayes $f_{1/2,\text{opt}}(n,r)$. Conclure.

Correction

On a :

$$f_{1/2,\text{opt}}(n,r)=1,3201>\frac{1}{2}$$

On préfère donc dire que le modèle "pièce équilibrée" est préférable.

Tester si une pièce était bien équilibrée : deuxième méthode

Une autre méthode pour s'assurer a posteriori de l'équilibre de la pièce consiste à comparer le modèle $M_{1/2}$ au modèle M_{bay} ainsi défini : pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on définit la variable aléatoire Q_N qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\left\{\frac{j}{N+1}, j = 1, \dots, N\right\}$ avec $P([Q_N = \frac{j}{N+1}]) = \frac{1}{N}$ pour tout $j = 1, \dots, N$. On suppose que la probabilité d'obtenir le résultat r dépend de la valeur de la variable aléatoire Q_N :

$$P([S_n = r]|[Q_N = \frac{j}{N+1}]) = P\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = r\right]\right),$$

avec $P([X_i = 1]) = \frac{j}{N+1}$ pour tout $i = 1, \dots, n$. On rappelle que la probabilité d'un événement A sachant qu'un événement B de probabilité non nulle est réalisé est donnée par

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Question 17.

En utilisant la formule des probabilités totales, donner l'expression (en fonction de n, r et N) de la probabilité $p_{\text{bay}}(n, r)$ que la variable S_n soit égale à r sous le modèle M_{bay}.

Correction

On a :

$$\begin{aligned} P([S_n = r]) &= \sum_{j=1}^{N} P([S_n = r] \cap [Q_[N] = \frac{j}{N+1}]) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \binom{r}{n} \left(\frac{j}{N+1}\right)^r \left(1 - \frac{j}{N+1}\right)^{n-r} \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Question 18.

Application numérique : Pour $n = 200$, $r = 115$ et $N = 100$, on a

$$\log_{10}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{j}{N+1}\right)^r \left(1 - \frac{j}{N+1}\right)^{n-r}\right) = -60.28.$$

Calculer la valeur du facteur de Bayes et conclure.

Correction

On a $\log_{10}(2^{-r}) = -60,206$ donc le facteur de Bayes est de $0,074$. La pièce semble donc équilibrée.

Problème II – Estimation de la production

Lors de la mise sur le marché de son dernier véhicule, un constructeur automobile a souhaité affecter à chaque voiture vendue un numéro. Ainsi, la première voiture vendue s'est vue attribuer le numéro 1, la deuxième, le numéro 2, etc. Ce numéro est clairement visible à l'arrière du véhicule. Au bout d'un an de mise sur le marché, un concurrent souhaite savoir combien de voitures ont été vendues par ce constructeur automobile. Pour ce faire, il dispose uniquement des numéros des voitures qu'il a croisées lors de l'année écoulée.

Notations : le nombre de voitures observées par le concurrent est noté k et les numéros correspondants, rangés par ordre croissant, sont notés $x_1 < \ldots < x_k$. Enfin, le nombre (inconnu) de véhicules vendus est noté N. On a donc forcément $k \leq N$.

On suppose dans la suite que le k-uplet $(x_1 < \ldots < x_k)$ est le résultat de l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard et sans remise k numéros parmi $\{1, \ldots, N\}$. Cette expérience est modélisée par l'espace $(\Omega_k, \mathscr{A}, P)$, où Ω_k est l'ensemble de tous les k-uplets $(x_1 < \ldots < x_k)$ possibles, $\mathscr{A}$ est la tribu de l'ensemble des parties de Ω_k et P est la probabilité uniforme.

Question 1.

Quel est (en fonction de N et k) le cardinal de Ω_k.

Correction

On a :

$$Card(\Omega_k) = \binom{N}{k}$$

Question 2.

Donner l'expression (en fonction de N et k) de la probabilité $P(\{(x_1 < \ldots < x_k)\})$ d'obtenir le tirage $x_1 < \ldots < x_k$.

Correction

On a :

$$P(\{(x_1 < \ldots < x_k)\}) = \frac{1}{\binom{N}{k}}$$

Question 3.

On introduit la variable aléatoire $M_k : \Omega_k \to \mathbb{N}$ qui à tout k-uplet $(x_1 < \ldots < x_k) \in \Omega_k$ associe la plus grande valeur x_k.

Pour $m < k$ ou $m > N$, quelle est la valeur de $P([M_k = m])$?

Correction

- Si $m < k$, on a $P([M_k = m]) = 0$
- Si $m > N$, on a $P([M_k = m]) = 0$

Question 4.

On suppose que m est tel que $k \leq m \leq N$.

Quel est le nombre de k-uplets $(x_1 < \ldots < x_k)$ pour lesquels $x_k = m$? En déduire la valeur de $P([M_k = m])$.

Correction

Il y a $\binom{m-1}{k-1}$ possibilités donc :

$$P([M_k = m]) = \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{k}{N}}$$

Question 5.

En utilisant les questions précédentes, montrer que

$$C_N^k := \frac{N!}{k!(N-k)!} = \sum_{m=k}^{N} C_{m-1}^{k-1}.$$

où pour tout entier $l > 0$, $l! = l \times (l-1) \times \ldots \times 1$ et avec la convention $0! = 1$.

Correction

par somme des probabilités totales, on sait que :

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=k}^{N} P([M_k = m]) = 1\\
\Leftrightarrow &\sum_{m=k}^{N} \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{k}{N}} = 1\\
\Leftrightarrow &\frac{1}{\binom{k}{N}} \sum_{m=k}^{N} \begin{pmatrix} k-1 \\ m-1 \end{pmatrix} = 1\\
\Leftrightarrow &\sum_{m=k}^{N} \begin{pmatrix} k-1 \\ m-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ N \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Question 6.

Montrer que l'espérance de M_k est donnée par

$$E(M_k) = \frac{k}{C_N^k} \sum_{m=k}^{N} C_m^k.$$

Correction

On a :

$$\begin{aligned}
E(M_k) &= \sum_{m=k}^{N} m \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{k}{N}}\\
&= \frac{1}{\binom{N}{k}} \sum_{m=k}^{N} m \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-1-(k-1))!}\\
&= \frac{1}{\binom{N}{k}} \sum_{m=k}^{N} \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}\\
&= \frac{1}{\binom{N}{k}} \sum_{m=k}^{N} k \frac{m!}{k!(m-k)!}\\
&= \frac{k}{\binom{N}{k}} \sum_{m=k}^{N} \frac{m!}{k!(m-k)!}\\
&= \frac{1}{\binom{N}{k}} \sum_{m=k}^{N} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Question 7.

En effectuant le changement de variable $l = m+1$ dans la somme ci-dessus et en utilisant le résultat de la question 5), montrer que $E(M_k) = k\frac{N+1}{k+1}$.

Correction

On a :

$$\begin{aligned}
E(M_k) &= \frac{k}{\binom{N}{k}} \sum_{l=k+1}^{N+1} \binom{l-1}{k} \\
&= \frac{k}{\binom{N}{k}} \frac{(N+1)!}{(k+1)!(N-k)!} \\
&= \frac{kk!(N-k)!}{N!} \frac{(N+1)!}{(k+1)!(N-k)!} \\
&= \frac{(N+1)k}{(k+1)}
\end{aligned}$$

Question 8.

On rappelle que le concurrent souhaite estimer le nombre N de véhicules vendus.

En utilisant la question précédente, proposer une fonction $\Psi_k(\cdot)$ (indépendante de N évidemment) telle que $E(\Psi_k(M_k)) = N$. La variable aléatoire $\Psi_k(M_k)$ est un estimateur sans biais de N?

Correction

En prenant $\Psi_k(M_k) = \frac{k+1}{k} M_k - 1$

Question 9.

Calculer $E[(\Psi_k(M_k))^2]$ et en déduire la variance de l'estimateur $\Psi_k(M_k)$ (Aide : remplacer m^2 par $m(m+1)-m$).

Correction

On a :

$$E[(\Psi_k(M_k))^2] = (\frac{k+1}{k})^2 E(M_k^2) + 1 - 2(N+1)$$

.

Or :

$$
\begin{aligned}
E(M_k^2) &= \sum_{m=k}^{N} m^2 \frac{\binom{m-1}{k-1}}{\binom{N}{k}} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{k}} \sum_{m=k}^{N} m(m+1)\frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} - \frac{(N+1)k}{k+1} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{k}} \sum_{m=k}^{N} \frac{(m+1)!k(k+1)}{(k+1)!(m-k)!} - \frac{(N+1)k}{k+1} \\
&= \frac{k(k+1)}{\binom{N}{k}} \sum_{m=k}^{N} \binom{m+1}{k+1} - \frac{(N+1)k}{k+1} \\
&= \frac{k(k+1)}{\binom{N}{k}} \sum_{l=k+2}^{N+2} \binom{l-1}{k+1} - \frac{(N+1)k}{k+1} \\
&= \frac{k(k+1)}{\binom{N}{k}} \binom{N+2}{k+2} - \frac{(N+1)k}{k+1} \\
&= \frac{k(k+1)k!(N-k)!}{N!} \frac{(N+2)!}{(N-k)!(k+2)!} - \frac{(N+1)k}{k+1} \\
&= \frac{k(N+2)(N+1)}{k+2} - \frac{(N+1)k}{k+1}
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
E[(\Psi_k(M_k))^2] &= \frac{(k+1)^2(N+2)(N+1)}{k(k+2)} - \frac{(k+1)(N-1)}{k} - 1 - 2N \\
&= \frac{(N+1)(k+1)\left[(k+1)(N+2) - k - 2\right]}{k(k+2)} - 1 - 2N \\
&= \frac{(N+1)(k+1)\left[Nk + 2k + N + 2 - k - 2\right]}{k(k+2)} - 1 - 2N \\
&= \frac{(N+1)(k+1)\left[Nk + k + N\right]}{k(k+2)} - 1 - 2N
\end{aligned}
$$

D'où,

$$
\begin{aligned}
Var(\Psi_k(M_k)) &= \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}(N+1)(N+2) - \frac{k+1}{k}(N+1) - 1 - 2N - N^2 \\
&= \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}(N+1)(N+2) - \frac{k+1}{k}(N+1) - (N+1)^2 \\
&= (N+1)\left[\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}(N+2) - \frac{k+1}{k} - (N+1)\right] \\
&= (N+1)\left[\frac{(K+1)^2(N+2) - (k+1)(k+2) - k(k+2)(N+1)}{k(k+2)}\right] \\
&= \frac{N+1}{k(k+2)}\left[(k^2+2k+1)(N+2) - (k+2)(kN+k) - (k+1)(k+2)\right] \\
&= \frac{N+1}{k(k+2)}\left[Nk^2 + 2k^2 + 2kN + 4k + N + 2 - k^2N - k^2 - 2kN - 2k - k^2 - 2k - k - 2\right] \\
&= \frac{N+1}{k(k+2)}\left[N - k\right]
\end{aligned}
$$

Question 10.

On suppose que $k = N - \lfloor N^a \rfloor$ avec $a \in]0,1[$, la notation $\lfloor \cdot \rfloor$ étant celle de la partie entière. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (voir le rappel donné à la fin du sujet), montrer que dans ce cas, $\Psi_k(M_k) - N$ converge en probabilité vers 0 lorsque $N \to \infty$.

Correction

D'après la question précédente, on a :

$$Var(\Psi_k(M_k)) = \frac{N+1}{k(k+2)}[N-k] \sim \frac{\lfloor N^a \rfloor N}{N^2} \sim N^(a-1)$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\forall \epsilon > 0$, on a :

$$P([|\Psi_k(M_k) - N| > \epsilon] \leq \frac{Var(\Psi_k(M_k))}{\epsilon^2} \sim \frac{N^{a-1}}{\epsilon^2} \to 0$$

Problème III – Estimation de la taille d'une population

Pour estimer la taille de la population d'une espèce animale, la méthode de "capture-marquage-recapture" (CMR) est couramment utilisée.

Si on note P une population de $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ individus (le nombre N étant inconnu), la méthode CMR consiste à :

- (C) tirer au hasard et sans remise $n \in \{1, \ldots, N\}$ individus dans la population P ;
- (M) marquer les n individus et les remettre dans la population P ;
- (R) tirer au hasard et sans remise $m \in \{1, \ldots, N\}$ individus dans la population P.

Dans la suite, on raisonnera comme si les N individus de la population étaient numérotés de 1 à N. Ceci n'est évidemment pas le cas en pratique mais permet de simplifier la modélisation du problème sans perte de généralité.

La modélisation probabiliste de la méthode CMR est le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ avec :

- Ω l'ensemble regroupant tous les résultats possibles de la méthode CMR. On notera $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ un élément de Ω avec :

  ω_1 un vecteur de taille N dont la i-ème composante $\omega_{1,i} = 1$ si l'individu numéro i a été capturé lors de l'étape (C) et 0 sinon

  ω_2 un vecteur de taille N dont la i-ème composante $\omega_{2,i} = 1$ si l'individu numéro i a été capturé lors de l'étape (R) et 0 sinon.
- $\mathscr{A}$ la tribu des parties de Ω ;
- P la probabilité uniforme.

Question 1.

Donner la valeur des sommes

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_{1,i} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} \omega_{2,i}.$$

Correction

Par définition, on a :

- $\sum_{i=1}^{N} \omega_{1,i} = n$
- $\sum_{i=1}^{N} \omega_{2,i} = m$

Question 2.

Quel est le cardinal de l'ensemble Ω ? En déduire la valeur de la probabilité $P(\{\omega\})$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Correction

On a $Card(\omega) = \binom{N}{n}\binom{N}{m}$ d'où $P(\{\omega\}) = \frac{1}{\binom{N}{n}\binom{N}{m}}$

Question 3.

On introduit la variable aléatoire $K : \Omega \to \mathbb{N}$ définie par

$$K(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \omega_{1,i}\omega_{2,i}.$$

Que peut-on dire lorsque la valeur observée de K est $k \in \mathbb{N}$?

Correction

Si $K(\omega) = k$ cela signifie que k individus marqués ont été capturés.

Question 4.

Si $n + m > N$, donner les valeurs de k pour lesquelles $P([K = k]) = 0$.

Correction

Il n'est pas possible que k soit strictement supérieur à $min(n, m)$. De même, il n'est pas possible que k soit strictement inférieur à $n + m - N$

Question 5.

Donner l'ensemble $E(n, m, N) \subset \mathbb{N}$ des valeurs possibles de K.

Correction

On a :

$$E(n, m, N) = \{max(0, m + n - N), min(n, m)\}$$

Question 6.

Pour tout $k \in E(n, m, N)$, donner, en fonction de n, m et N, l'expression de la probabilité $P([K = k])$.

Correction

Il y a $\binom{N}{n}\binom{n}{k}\binom{N-n}{m-k}$ possibilités pour que $K = k$.
Ainsi :

$$P([K=k]) = \frac{\binom{N}{k}\binom{N-n}{m-k}}{\binom{N}{m}}$$

Question 7.

En déduire la relation

$$\sum_{k\in E(n,m,N)} C_n^k C_{N-n}^{m-k} = C_N^m.$$

Correction

Par la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in E(n,m,N)} P([K=k]) = 1\\
\Leftrightarrow &\sum_{k\in E(n,m,N)} \frac{\binom{N}{k}\binom{N-n}{m-k}}{\binom{N}{m}} = 1\\
\Leftrightarrow &\frac{1}{\binom{N}{m}} \sum_{k\in E(n,m,N)} \binom{N}{k}\binom{N-n}{m-k} = 1\\
\Leftrightarrow &\sum_{k\in E(n,m,N)} \binom{n}{k}\binom{m-k}{N-n} = \binom{N}{m}
\end{aligned}$$

Question 8.

En remarquant que $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, et en utilisant la relation ci-dessus, donner l'expression de l'espérance de K.

Correction

On a :

$$\begin{aligned}
E(k) &= \frac{1}{\binom{N}{m}} \sum_{k\in E(n,m,N)} k\binom{n}{k}\binom{N-n}{m-k}\\
&= \frac{1}{\binom{N}{m}} \sum_{k\in E(n,m,N)} n\binom{n-1}{k-1}\binom{N-n}{m-k}\\
&= \frac{n}{\binom{N}{m}} \sum_{k=max(0,m+n-N)}^{min(n,m)} \binom{n-1}{k-1}\binom{N-n}{m-k}\\
&= \frac{n}{\binom{N}{m}} \sum_{k=max(0,m+n-N)}^{min(n,m)} \binom{n-1}{k-1}\binom{(N-1)-(n-1)}{(m-1)-(k-1)}
\end{aligned}$$

Posons $l = k-1$, on a alors :

$$\begin{aligned}
E(k) &= \frac{n}{\binom{N}{m}} \sum_{l=max(0,n+m-N-1)}^{min(n-1,m-1)} \binom{n-1}{l}\binom{(N-1)-(n-1)}{(m-1)-l} \\
&= \frac{n}{\binom{N}{m}} \sum_{l=max(0,(n-1)+(m-1)-(N-1))}^{min(n-1,m-1)} \binom{n-1}{l}\binom{N-1-(n-1)}{(m-1)-l} \\
&= \frac{n}{\binom{N}{m}} \binom{N-1}{m-1} \\
&= \frac{n(N-1)!}{(m-1)!(N-m)!}\frac{(N-n)!m!}{N!} \\
&= \frac{nm}{N}
\end{aligned}$$

Question 9.

Proposer une fonction $\Psi_{n,m}(\cdot)$ telle que $\frac{1}{\hat{N}} = \frac{1}{\Psi_{n,m}(K)}$ soit un estimateur sans biais de $\frac{1}{N}$. La variable aléatoire $\hat{N}$ est-elle un estimateur sans biais de N?

Correction

Prenons

$$\Psi_{n,m}(K) = \left(\frac{K}{mn}\right)$$

On a :

$$E\left(\frac{1}{\hat{N}}\right) = \frac{1}{N}$$

Question 10.

On suppose à présent que $n+m > N$.

Donner, en fonction de n, m et N, l'expression de l'espérance de $\frac{1}{K+1}$.

Correction

On a :

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{K+1}\right) &= \sum_{k=m+n-N}^{min(n,m)} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}\binom{N-n}{m-k}\frac{1}{\binom{N}{m}} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{m}} \sum_{k=m+n-N}^{min(n,m)} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}\binom{N-n}{m-k} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{m}} \frac{1}{n+1} \sum_{k=m+n-N}^{min(n,m)} \binom{n+1}{k+1}\binom{N-n}{m-k} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{m}} \frac{1}{n+1} \sum_{l=m+n-N+1}^{min(n+1,m+1)} \binom{n+1}{l}\binom{N+1-(n+1)}{m+1-l} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{m}} \frac{1}{n+1} \binom{N+1}{m+1} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{N+1}{m+1}
\end{aligned}$$

Question 11.

Utiliser la question précédente pour proposer un estimateur sans biais de N.

Correction

En prenant $\hat{N} = \frac{(n+1)(m+1)}{k+1} - 1$, on a un estimateur sans biais de N.

Problème IV – Inégalités de Markov et de Cantelli

Dans ce problème, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et on note $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $E(X) = m \in \mathbb{R}$ et $E(X^2) = \sigma^2 + m^2$. Pour tout $\epsilon > 0$, on introduit la variable aléatoire $Y_\epsilon : \Omega \to \{0, 1\}$ définie pour tout $\omega \in \Omega$ par

$$Y_\epsilon(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |X(\omega)| > \epsilon, \\ 0 & \text{si } |X(\omega)| \leq \epsilon. \end{cases}$$

Question 1.

En posant $p_\epsilon := P([|X| > \epsilon])$, donner l'expression de $E(Y_\epsilon)$.

Correction

La variable aléatoire Y_ϵ suit une loi de Bernoulli de paramètre p_2. Donc $E(Y\epsilon) = p_\epsilon$

Question 2.

Montrer que pour tout $a \in [0, 2]$, $E(|X|^a) \geq E(|X|^a Y_\epsilon)$.

Correction

Par croissance de l'espérance.

Question 3.

En déduire l'inégalité de Markov : pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $a \in [0, 2]$,

$$P([|X| > \epsilon]) \leq \frac{E(|X|^a)}{\epsilon^a}.$$

Correction

Par définition de Y_ϵ, on a $|X|^a Y_\epsilon = |X|^a$ sur $\{|X| > \epsilon\}$ et 0 ailleurs.
En prenant l'espérance on obtient :

$$E(|X|^a Y_\epsilon) = E(|X|^a \mathbb{1}_{|X|>\epsilon}).$$

Comme $|X|^a \geq \epsilon^a$ sur $\{|X| > \epsilon\}$, on obtient

$$E(|X|^a \mathbb{1}_{|X|>\epsilon}) \geq \epsilon^a P(|X| > \epsilon).$$

D'après la question 2, on sait que $E(|X|^a Y_\epsilon) \leq E(|X|^a)$, donc

$$E(|X|^a) \geq \epsilon^a P(|X| > \epsilon).$$

D'où

$$P([|X|>\epsilon]) \leq \frac{E(|X|^a)}{\epsilon^a}.$$

Question 4.

Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ et $\alpha > 0$,

$$P([X-\alpha>\epsilon]) \leq P([|X-\alpha|>\epsilon]).$$

Correction

On a :

$$P([|X-\alpha|>\epsilon]) = P([X-\alpha>\epsilon]) + P([X-\alpha<-\epsilon]) \qquad \geq P([X-\alpha>\epsilon])$$

Question 5.

En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que pour tout $\epsilon > 0$ et $\lambda > 0$,

$$P([X-m+\lambda>\epsilon+\lambda]) \leq \frac{\sigma^2+\lambda^2}{(\epsilon+\lambda)^2}.$$

Correction

On a :

$$\begin{aligned} P([X-m+\lambda>\epsilon+\lambda]) &\leq P([|X-m+\lambda|>\epsilon+\lambda]) \\ &\leq \frac{E(X-m+\lambda)^2}{(\epsilon+\lambda)^2} \\ &= \frac{\sigma^2+\lambda^2}{(\epsilon+\lambda)^2} \end{aligned}$$

Question 6.

Après avoir fait l'étude de la fonction $\lambda \in [0,\infty[\mapsto \frac{\sigma^2+\lambda^2}{(\epsilon+\lambda)^2}$, montrer que pour tout $\epsilon > 0$, la meilleure majoration est donnée par

$$P([X-m>\epsilon]) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2+\sigma^2}.$$

Correction

Soit $f(\lambda) = \frac{\sigma^2+\lambda^2}{(\epsilon+\lambda)^2}$. On a :

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= \frac{2\lambda(\epsilon+\lambda)^2-(\sigma^2+\lambda^2)2(\epsilon+\lambda)}{(\epsilon+\lambda)^2} \\ &= \frac{2(\epsilon+\lambda\left[\lambda(\epsilon+\lambda)-\sigma^2-\lambda^2\right]}{(\epsilon+\lambda)^2} \\ &= \frac{2(\epsilon+\lambda)\left[\lambda\epsilon-\sigma^2\right]}{(\epsilon+\lambda)^2} \end{aligned}$$

D'où le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{\sigma^2}{\epsilon}$		$+\infty$
$f'(\lambda)$		$-$		$+$	
$f(\lambda)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Ainsi, en prenant : $\lambda = \frac{\sigma^2}{\epsilon}$, on a :

$$P([X - m > \epsilon]) \leq \frac{\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{\epsilon}}{(\epsilon + \frac{\sigma^2}{\epsilon})^2} = \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 + \sigma^2}$$

Question 7.

En vous inspirant des questions précédentes, montrer que pour tout $\epsilon > 0$,

$$P([X - m < -\epsilon]) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 + \sigma^2}.$$

Correction

On a :

$$P([X - m - \lambda < -\epsilon - \lambda]) \leq P([|X - m - \lambda| > \epsilon + \lambda]) \leq \frac{E((X - m - \lambda)^2)}{(\epsilon + \lambda)\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 + \sigma^2}$$

Question 8.

En déduire l'inégalité de Cantelli : pour tout $\epsilon > 0$,

$$P([|X - m| > \epsilon]) \leq \frac{2\sigma^2}{\epsilon^2 + \sigma^2}.$$

Correction

On a :

$$P([|X - m| > \epsilon]) = P([X - m > \epsilon]) + P([X - m < -\epsilon]) \leq \frac{2\sigma^2}{\epsilon^2 + \sigma^2}$$

Question 9.

Pour quelles valeurs de $\epsilon > 0$, l'inégalité de Cantelli est-elle préférable à celle de Bienaymé-Tchebychev?

Correction

Il faut trouver la valeur de $\epsilon > 0$ pour laquelle :

$$\frac{2\sigma^2}{\epsilon^2 + \sigma^2} \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \Leftrightarrow 2\epsilon^2 \leq \epsilon^2 + \sigma^2 \Leftrightarrow \epsilon^2 < \sigma^2 \Leftrightarrow \epsilon \in]0, \sigma[$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve de français

Éléments de correction

Proposition de résumé en 179 mots

La pandémie de Covid-19 a été une épreuve mondiale. Elle a rappelé la fragilité humaine et bouleversé nos certitudes. L'idée même d'« épreuve » a été questionnée. Historiquement, elle renvoie à un test, une difficulté, voire une mise à l'épreuve divine. En philosophie et psychologie, elle symbolise douleur et transformation.

Gustave-Nicolas Fischer distingue six types d'expériences extrêmes : maladies, guerres, catastrophes, privation de liberté, pertes et dépendances. Ces épreuves fragilisent autant physiquement que psychologiquement. La séparation, le deuil ou l'isolement brisent aussi. Robinson Crusoé illustre l'importance d'autrui dans la construction personnelle. Collectivement, entreprises et civilisations connaissent aussi des épreuves fatales.

Face à l'adversité, trois attitudes existent : combattre, fuir ou ne rien faire. La lutte est valorisée mais épuise parfois. La fuite est vue comme une lâcheté, bien qu'elle puisse être salvatrice. L'inaction, loin d'être passive, permet parfois de survivre. Chaque individu reconstruit différemment après l'épreuve.

La résilience est un espoir mais n'est pas garantie. Si certains trouvent dans l'épreuve une force nouvelle, d'autres en ressortent brisés. Comme le roseau de Pascal, l'être humain oscille entre chute et redressement.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve d'anglais

Éléments de correction

1 Summarize this text in English in 200 words (+/- 10%)

In the developing world, a lack of reliable statistics hinders economic and social progress. Unlike wealthier countries, where individuals worry about excessive government surveillance, many poorer nations struggle with insufficient data collection. Around a billion people lack official identification, and many countries have outdated or incomplete census data. This scarcity of reliable statistics limits effective policymaking and aid distribution.

To compensate, researchers explore alternative data sources like mobile phone usage and satellite imagery. For example, mobile data helped map lockdown inequalities during COVID-19, and machine-learning algorithms identified poverty levels in Afghanistan based on phone usage patterns. Satellite images have also improved poverty mapping, as seen in Tanzania, where high-resolution data refined economic insights.

However, improving data collection is only part of the solution. Governments often fail to share or utilize existing statistics effectively. Bureaucrats lack incentives to collect accurate data, and political concerns discourage transparency. Many officials even misunderstand basic demographic statistics in their own districts.

To address these issues, the World Development Report calls for a cultural shift in data governance. Strong political leadership and public demand for better statistics could improve data usage. A mix of private and public data could enhance decision-making, as seen with the Gallup World Poll. Ultimately, better data handling is crucial for informed policymaking and economic growth.

2 Translate the following text into French

Comment les frères Barclay ont construit et détruit un empire

La guerre contre le blanchiment d'argent est en train d'être perdue Le système mondial de lutte contre la criminalité financière est extrêmement coûteux et largement inefficace

Par The Economist le 12 avril 2021

Une banque de plus se prépare à faire face à la musique en raison de prétendues défaillances dans ses efforts pour freiner les flux d'argent sale. les flux d'argent sale. Dans les semaines à venir, NatWest, l'un des plus grands prêteurs britanniques, devrait comparaître devant un tribunal de Londres pour répondre aux accusations selon lesquelles elle n'a pas correctement d'or qui a déposé 365 millions de livres sterling (502 millions de dollars) auprès de la banque, dont 264 millions de livres sterling en espèces. NatWest (qui a déclaré coopérer avec les enquêteurs) est le dernier prêteur en date à être accusé d'avoir failli dans la lutte contre l'argent sale. L'année dernière, les banques du monde entier se sont vu infliger des amendes d'un montant de 10,4 milliards de dollars. 10,4 milliards de dollars d'amendes pour des infractions liées au blanchiment d'argent, soit une augmentation de plus de 80 % par rapport à 2019, selon Fenergo, une société de logiciels de conformité. En janvier, Capital One, une banque américaine, a été condamnée à une amende de 390 millions de dollars pour avoir omis de signaler des milliers de transactions douteuses. La Danske Bank toujours en train de gérer les retombées d'un scandale qui a éclaté en 2018. Plus de

200 milliards de dollars d'argent potentiellement sale ont transité par la succursale estonienne du prêteur danois, tandis que les dirigeants ont manqué ou ignoré une multitude de signaux d'alarme. ou ignoré une multitude de signaux d'alarme. Ces affaires montrent que les banques restent le talon d'Achille dans la guerre mondiale contre le blanchiment d'argent, malgré les nombreuses réglementations visant à les transformer en soldats de première ligne dans ce conflit. Cependant, un examen plus approfondi suggère que le système mondial de lutte contre le blanchiment d'argent (AML) présente de graves lacunes structurelles, en grande partie parce que les gouvernements ont confié au secteur privé une grande partie du contrôle qu'ils devraient exercer. au secteur privé une grande partie du travail de police qu'ils auraient dû effectuer eux-mêmes.