Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1. Une caractérisation de la loi géométrique

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, **indépendantes et de même loi**, toutes deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$I(\omega) = \min\big(X(\omega), Y(\omega)\big), \quad M(\omega) = \max\big(X(\omega), Y(\omega)\big) \quad \text{et} \quad D(\omega) = M(\omega) - I(\omega).$$

1. Montrer que I et M sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

2. Dans cette question, on suppose que la loi commune de X et Y est géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. *On pourra poser* $q = 1 - p$.

   (a) Reconnaître la loi de la variable I.

   (b) Calculer, pour tout $(i,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}([I = i] \cap [D = d])$ (qu'on pourra noter $\mathbf{P}(I = i, D = d)$).

   On séparera les cas $d = 0$ *et* $d > 0$.

   (c) Déterminer la loi de la variable D.

   (d) Vérifier que les variables I et D sont indépendantes.

3. Dans cette question, la loi commune de X et Y est inconnue et on suppose que les variables I et D sont indépendantes.

   On note $b := \mathbf{P}(D = 0)$ et, pour tout entier naturel k non nul, $p_k = \mathbf{P}(X = k)$.

   On suppose $p_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Exprimer le réel b à l'aide de la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.

   (b) Exprimer, pour tout entier naturel k, la probabilité $\mathbf{P}(I > k)$ à l'aide de la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.

   (c) Soit $k \in \mathbb{N}$. En calculant la probabilité $\mathbf{P}(I > k, D = 0)$ établir l'égalité

   $$\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2 = b\Big(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\Big)^2.$$

   (d) i. En déduire, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $(1-b)p_k = 2b\mathbf{P}(X > k)$.

   ii. Calculer p_1 en fonction de b puis établir, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $p_{k+1} = \dfrac{1-b}{1+b}\, p_k$.

   (e) En déduire que la loi commune des variables X et Y est géométrique de paramètre p_1.

Exercice 2. Un calcul de $\zeta(2)$

On pose, pour tout entier naturel n, $C_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x$ et $D_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x$.

1. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $C_n = (2n-1)(C_{n-1} - C_n)$.

   On pourra écrire $\cos^{2n} x = \cos x \cos^{2n-1} x$.

2. Établir, pour tout entier naturel n non nul, les égalités

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2}\,\mathrm{d}x = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}\cdot$$

3. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $C_n = (2n-1)nD_{n-1} - 2n^2 D_n$.

4. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\dfrac{1}{n^2} = 2\Big(\dfrac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \dfrac{D_n}{C_n}\Big)$.

5. (a) Justifier, pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la minoration : $\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi}\, x$.

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, la majoration : $D_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\,\dfrac{C_n}{2n+2}\cdot$

6. Prouver l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$

Exercice 3. Trois preuves d'une égalité combinatoire

1. `Avec la fonction Beta`

   On pose, pour tout couple (n,p) d'entiers naturels, $B(n,p) = \displaystyle\int_0^1 t^n (1-t)^p\,\mathrm{d}t$.

   (a) Relier, pour tout couple $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, les réels $B(n,p)$ et $B(n+1,p-1)$. En déduire, pour tout couple $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, l'égalité : $B(n,p) = \dfrac{n!\,p!}{(n+p+1)!}\cdot$

   (b) Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Établir l'égalité

$$(\mathscr{E}) \qquad \frac{(m-1)!\,n!}{(m+n)!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{m+k}\cdot$$

2. `Avec des différences finies`

   On note Δ l'application qui, à chaque suite réelle $u := (u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$, associe la suite

$$\Delta(u) := (u_{p+1} - u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}.$$

   On note, $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$, $\Delta^3 = \Delta \circ \Delta \circ \Delta$, *etc.*, et $\Delta^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}}$.

   (a) Prouver, pour toute suite $u := (u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$, pour tout entier naturel n et tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, l'égalité

$$\big(\Delta^n(u)\big)_p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} u_{p+k}.$$

   (b) En utilisant la suite $u := \big(\dfrac{1}{p}\big)_{p\in\mathbb{N}^*}$ établir à nouveau l'égalité $(\mathscr{E})$.

3. `Par un raisonnement probabiliste`

   On rappelle que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ on dispose de la formule du crible suivante

$$\mathbf{P}\big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k}).$$

(a) Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et B des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$. Établir l'égalité

$$\mathbf{P}(B \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbf{P}(B) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbf{P}(B \cap A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap \ldots A_{i_k}^c),$$

(où l'on note E^c le complémentaire d'un événement E).

Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère une urne contenant une boule noire notée N, n boules blanches notées $B_1, B_2, \ldots, B_n$ et $m-1$ boules rouges notées $R_1, R_2, \ldots, R_{m-1}$. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne, sans remise de la boule dans l'urne après tirage, jusqu'à épuisement de l'urne. Un résultat de cette expérience aléatoire est donc une $(m+n)$-liste (ordonnée ...) composée des $m+n$ symboles $B_1, B_2, \ldots, B_n$, $R_1, R_2, \ldots, R_{m-1}$ et N. On note B l'événement constitué des tirages où la boule noire est tirée avant chacune des boules rouges, et, pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, A_i l'événement constitué des tirages où la boule noire est tirée après la boule blanche B_i.

(b) Calculer la probabilité $\mathbf{P}(B)$.

(c) Calculer la probabilité $\mathbf{P}(B \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i)$.

(d) Prouver, pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$ et tout k-liste $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ avec $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$, l'égalité

$$\mathbf{P}(B \cap A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap \ldots A_{i_k}^c) = \frac{1}{m+k}.$$

(e) i. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer – en le justifiant – le nombre de k-listes $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ d'entiers telles que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$.

ii. En déduire à nouveau l'égalité $(\mathscr{E})$.

Exercice 4. Une propriété des matrices symétriques

On note, pour tout entier naturel n non nul, $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles colonnes de taille n que l'on munit de sa structure euclidienne standard où le produit de deux matrices colonnes X et Y est ${}^{\mathrm{t}}XY$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre n et symétriques.

On note, pour tout entier naturel n non nul et pour toute matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$,

$$R(A) = \left\{ {}^{\mathrm{t}}XAX \,;\, {}^{\mathrm{t}}XX = 1 \right\}.$$

On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthogonalement semblable** à une matrice $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ (*i.e.* vérifiant l'égalité ${}^{\mathrm{t}}PP = I_n$) pour laquelle $B = {}^{\mathrm{t}}PAP$.

1. Soit $(A, B) \in S_n(\mathbb{R})^2$. On suppose que A est orthogonalement semblable à B.

   Prouver l'égalité : $R(A) = R(B)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A rangées dans l'ordre croissant *i.e.* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

   (a) Prouver l'inclusion : $R(A) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$.

(b) Établir l'égalité : $R(A) = [\lambda_1, \lambda_n]$.

(c) Montrer que si la matrice A est de trace nulle alors 0 est élément de $R(A)$. Dans le cas où $n = 3$, la réciproque est-elle vraie ?

On appelle diagonale d'une matrice $M := (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la liste $(m_{1,1}, m_{2,2}, \ldots, m_{n,n})$ de ses éléments diagonaux.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'on dispose d'une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ pour laquelle ${}^tPAP$ **a pour diagonale** $(\operatorname{Tr} A, 0, \ldots, 0)$ (où $\operatorname{Tr} A$ désigne la trace de A). Vérifier que $\operatorname{Tr} A$ est élément de $R(A)$.

3. (a) Donner un exemple de matrice $A \in S_2(\mathbb{R})$ dont la trace n'est pas élément de $R(A)$.

   (b) Soit $A \in S_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{Tr} A \in R(A)$ si et seulement si $0 \in R(A)$.

4. Soit $A \in S_2(\mathbb{R})$. On suppose que $\operatorname{Tr} A \in R(A)$. Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice dont la diagonale est $(\operatorname{Tr} A, 0)$.

5. Soit n un entier avec $n \geqslant 2$. On suppose que toute matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Tr} A \in R(A)$ est orthogonalement semblable à une matrice ayant pour diagonale $(\operatorname{Tr} A, 0, \ldots, 0)$.

   Soit $A \in S_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Tr} A \in R(A)$.

   (a) Justifier l'existence d'une matrice colonne $C \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, d'une matrice ligne $L \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et d'une matrice $B \in S_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles la matrice A est orthogonalement semblable à la matrice par blocs $\begin{pmatrix} \operatorname{Tr} A & L \\ C & B \end{pmatrix}$.

   (b) Que vaut $\operatorname{Tr} B$? En déduire que $\operatorname{Tr} B \in R(B)$.

   (c) Conclure que la matrice A est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale $(\operatorname{Tr} A, 0, \ldots, 0)$.

6. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un réel a pour lequel la matrice A est orthogonalement semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à a.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Le thème du problème est le comportement asymptotique des restes des séries numériques convergentes, à travers l'étude d'exemples variés.

L'énoncé est divisé en quatre parties largement indépendantes, que les candidats ne sont pas tenus de traiter dans l'ordre.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Pour toute suite réelle $u = \left(u_n\right)_{n\geq 0}$, on notera $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ la série de terme général u_n et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ la somme de cette série lorsqu'elle est convergente.

Partie 1 Exemples de calcul explicite du reste

1. Rappeler pourquoi, lorsque la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, la suite de terme général $\sum_{k=n}^{\infty} u_k$ est convergente. Quelle est alors sa limite ?

2. Dans cette question, x désigne un nombre réel non nul, de signe quelconque.

   a) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est convergente. Quelle est sa somme ?

   b) Établir, pour tout nombre entier strictement positif n, l'égalité :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2}}{(2n-2)!} \operatorname{sh}(t)\,\mathrm{d}t \quad .$$

   c) Donner une expression similaire de $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$, sous la forme d'une intégrale.

3. a) Démontrer que la série de terme général $a_n = \arctan\left(\frac{2n}{n^4+n^2+2}\right)$ est convergente.

   b) Trouver un couple (P,Q) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient :

$$\begin{cases} P(X) - Q(X) = 2X \\ P(X)\,Q(X) = X^4 + X^2 + 1 \end{cases} \quad .$$

   c) Établir que, pour tout couple (x, y) de nombres réels positifs ou nuls , on a :

$$\arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) = \arctan(x) - \arctan(y) \quad .$$

   d) Déduire des deux questions précédentes que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \frac{\pi}{2} - \arctan(n^2 - n + 1) \,.$$

   e) La série $\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right)$ est-elle convergente ?

Partie II Exemples d'évaluation asymptotique du reste

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^x}$ est convergente si, et seulement si, x est strictement supérieur à 1.

5. Dans cette question on suppose que le réel x est strictement supérieur à 1 et, pour tout entier n strictement positif, on note $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ln k}{k^x}$.

   a) Pour tout réel a strictement positif, justifier l'égalité :
$$\int_a^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x}\,\mathrm{d}t = \frac{a^{1-x}\big(1+(x-1)\ln a\big)}{(x-1)^2}\,.$$

   b) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, la double inégalité :
$$\int_n^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x}\,\mathrm{d}t \;\le\; r_n \;\le\; \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x}\,\mathrm{d}t \quad .$$

   c) En déduire que r_n est équivalent à $\frac{\ln n}{(x-1)\,n^{x-1}}$ quand n tend vers l'infini.

6. Sommation des relations de comparaison

   On considère deux suites $v = \left(v_n\right)_{n\geq 0}$ et $w = \left(w_n\right)_{n\geq 0}$ à termes réels non nuls.
   On suppose que v_n est équivalent à w_n quand n tend vers l'infini et que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente.

   On rappelle que, si tous les termes de la suite v sont positifs, alors :

   - la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ est convergente.
   - $\sum_{k=n}^{\infty} w_k$ est équivalent à $\sum_{k=n}^{\infty} v_k$ quand n tend vers l'infini .

   a) À l'aide d'un contre-exemple, montrer que la première de ces deux propriétés de w ne serait pas assurée si le signe des termes de la suite v n'était pas constant.

   b) Montrer de même que, lorsque le signe des termes de la suite v n'est pas constant, il est possible que la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ soit convergente mais que $\sum_{k=n}^{\infty} w_k$ ne soit pas équivalent à $\sum_{k=n}^{\infty} v_k$ quand n tend vers l'infini. *On pourra utiliser pour w la suite de terme général* $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n(n+1)}$.

Pour traiter la question qui suit, on pourra admettre la propriété suivante qui complète les propriétés rappelées précédemment.

Si v et w sont deux suites à termes positifs telles que $v_n = o(w_n)$ (v_n négligeable par rapport à w_n quand n tend vers l'infini) et si les séries $\sum_{n\geq 0} v_n$ et $\sum_{n\geq 0} w_n$ sont convergentes, alors
$$\sum_{k=n}^{\infty} v_k = o\Big(\sum_{k=n}^{\infty} w_k\Big)\,.$$

7. Un exemple probabiliste

Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.
On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p $(\in]0,1[)$, que Y suit la loi de Poisson de paramètre λ (> 0) et que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbf{P}(X \geq n)$.

b) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité

$$\mathbf{P}(X + Y = n) = p(1-p)^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{1-p}\right)^k.$$

c) En déduire que $\mathbf{P}(Y \geq n)$ est négligeable devant $\mathbf{P}(X + Y \geq n)$ quand n tend vers l'infini.

d) Démontrer que $\mathbf{P}(X + Y \geq n)$ est équivalent à $\mathrm{e}^{\lambda p/(1-p)}(1-p)^{n-1}$ quand n tend vers l'infini.

e) En déduire que la série $\sum\limits_{n \geq 0} \mathbf{P}(X + Y \geq n)$ est convergente. Quelle est sa somme ?

Partie III Étude du reste comme opérateur

On note L_∞ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées et $\| \, \|_\infty$ la norme sur L_∞ définie par

$$\forall\, u = (u_n)_{n \geq 0}, \quad \| u \|_\infty = \sup\{|u_n|\,;\, n \in \mathbb{N}\}.$$

8. Démontrer que l'espace vectoriel F des suites réelles convergentes et de limite nulle est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(L_\infty, \| \, \|_\infty)$.

9. On note E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \geq 0}$ telles que la série $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

a) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de F.

b) L'ensemble E est-il une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(L_\infty, \| \, \|_\infty)$? Quelle est son adhérence ?

10. On note Φ l'application qui, à tout élément $u = (u_n)_{n \geq 0}$ de E associe la suite $r = (r_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$$

a) Calculer $\| u \|_\infty$ et $\| \Phi(u) \|_\infty$ lorsque u est une suite géométrique convergente de premier terme u_0 égal à 1.

b) Démontrer que Φ est une application linéaire et injective de E dans L_∞, dont l'image est F.

c) On note Ψ la restriction de Φ à E, considérée comme une bijection de E sur F.

On munit E et F de la norme $\| \|_\infty$.

i) L'application Ψ est-elle continue ?

ii) L'application réciproque Ψ^{-1} est-elle continue ?

Partie IV Restes de séries alternées

Dans cette partie, f désigne une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$, décroissante et convexe, à valeurs strictement positives et de limite nulle en $+\infty$.

On rappelle que, si $v = \left(v_n\right)_{n\geq 0}$ est une suite à termes réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle, alors :

- la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n v_n$ est convergente
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k v_k$ est positive si n est pair, négative si n est impair, et vérifie l'inégalité

$$|\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k v_k| \leq v_n \,.$$

11. Établir, pour tout réel positif ou nul t, la double inégalité :

$$0 \leq \frac{f(t) - f(t+1)}{f(t)} \leq -\frac{f'(t)}{f(t)} \quad .$$

12. Pour tout entier positif ou nul n, on pose : $u_n = (-1)^n f(n)$.

a) Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

b) Pour tout entier positif ou nul n, on pose : $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$.

Démontrer que, pour tout entier positif ou nul n, on a :

i) $| r_n | = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p f(n+p)$

ii) $0 \leq | r_n | - | r_{n+1} | \leq f(n) - f(n+1)$.

c) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} r_n$ est convergente.

d) Démontrer que, si le quotient $\dfrac{f'(t)}{f(t)}$ tend vers 0 quand le réel t tend vers l'infini alors r_n est équivalent à $\dfrac{u_n}{2}$ quand n tend vers l'infini.

13. a) Pour quelles valeurs du réel x la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$ est-elle convergente ?

b) Pour ces valeurs, déduire des résultats précédents un équivalent de $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k^x}$ quand n tend vers l'infini.

14. a) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est convergente.

b) La série de terme général $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$ est-elle convergente ?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h

Le sujet est composé de quatre problèmes qui peuvent être traités indépendamment. La notation tiendra largement compte de la clarté et de la précision des réponses.

Problème I – Le facteur de Bayes

Le résultat d'une expérience aléatoire est un réel r qui est vu comme la réalisation d'une variable aléaoire R. Pour une même expérience, la loi de la variable aléatoire R peut être définie de différentes manières. Choisir une loi pour R équivaut à choisir un modèle pour l'expérience aléatoire.

Face à ces différentes possibilités de modélisation, une question naturelle est de savoir *a posteriori*, c'est-à-dire après avoir pris connaissance du résultat de l'expérience, si un modèle A est préférable à un autre modèle B. Pour répondre à cette question, on peut calculer le facteur de Bayes défini par

$$f_{A,B} := \log_{10} p_A - \log_{10} p_B,$$

où p_A est la probabilité que $R = r$ sous le modèle A et p_B est la probabilité que $R = r$ sous le modèle B. La notation $\log_{10}$ correspond au logarithme décimal (base 10).
Evidemment, une valeur positive de $f_{A,B}$ suggère que le modèle A est préférable à B. Plus précisément, l'interprétation de la valeur $f_{A,B}$ est donnée dans le tableau suivant.

$f_{A,B}$	Décision
$< -1/2$	Le modèle B est préféré au modèle A.
de $-1/2$ à $1/2$	On ne peut pas distinguer les deux modèles.
$> 1/2$	Le modèle A est préféré au modèle B.

TABLE 1 – Règle de décision du facteur de Bayes

L'objectif de ce problème est d'appliquer cette méthode de décision sur une expérience simple : le "pile ou face".

Questions préliminaires

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètres respectifs $q_1 \in]0,1[$ et $q_2 \in]0,1[$. On a donc $\mathbb{P}([X_i = 1]) = q_i$ et $\mathbb{P}([X_i = 0]) = 1 - q_i$ pour $i \in \{1,2\}$.

I.1) On introduit la variable aléatoire $S_2 = X_1 + X_2$. Déterminer l'ensemble E_2 des valeurs prises par la variable aléatoire S_2.

I.2) Pour tout $k \in E_2$, donner l'expression (en fonction de q_1 et q_2) la valeur de la probabilité $\mathbb{P}([S_2 = k])$.

I.3) Calculer l'espérance et la variance de S_2.

On considère à présent $n > 2$ variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ de loi de Bernoulli avec pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}([X_i = 1]) = q_i \in]0,1[$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

I.4) En fonction de $q_1, \dots, q_n$, donner les expressions de $\mathbb{P}([S_n = 0])$ et $\mathbb{P}([S_n = 1])$.

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on note $\mathscr{S}_k$ l'ensemble des vecteurs $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ tels que $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.

I.5) Donner en fonction de k et n le cardinal de l'ensemble $\mathscr{S}_k$.

I.6) Montrer que

$$\mathbb{P}([S_n = 2]) = \sum_{(i_1, i_2) \in \mathscr{S}_2} q_{i_1} q_{i_2} \prod_{i_\ell \neq i_1, i_2} (1 - q_{i_\ell}).$$

I.7) Pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, donner l'expression de $\mathbb{P}([S_n = k])$.

I.8) Dans le cas où $q_1 = \dots = q_n$, simplifier l'expression de $\mathbb{P}([S_n = k])$ obtenue à la question précédente. Quel nom donne-t-on à la loi de S_n dans ce cas ?

Le “pile ou face”

Prenons l'exemple de l'expérience aléatoire consistant à lancer n fois une pièce de monnaie et à compter le nombre de fois où l'on obtient le côté “pile”. Le résultat r de cette expérience est la réalisation de la variable aléatoire R donnée par

$$R = S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ étant indépendantes et telles que $X_i = 1$ si le côté “pile” est obtenu au i-ème lancer et $X_i = 0$ sinon.

On compare les modélisations suivantes.

– Modèle $M_{1/2}$: la pièce est équilibrée et donc $\mathbb{P}([X_i = 1]) = 1/2$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
– Modèle M_q : la probabilité d'obtenir le côté “pile” est égale à $q \in]0, 1[$.

I.9) Donner l'expression de la probabilité $p_{1/2}(n, r) := \mathbb{P}([S_n = r])$ lorsque la pièce est supposée équilibrée (modèle $M_{1/2}$).

I.10) Pour tout $r \in \{0, \dots, n\}$, donner l'expression de la probabilité $p_q(n, r) := \mathbb{P}([S_n = r])$ lorsque l'on se place sous le modèle M_q. En déduire l'expression du facteur de Bayes

$$f_{1/2,q}(n, r) = \log_{10} p_{1/2}(n, r) - \log_{10} p_q(n, r).$$

I.11) Dresser le tableau de variation de la fonction $q \mapsto f_{1/2,q}(n, r)$.

On introduit l'ensemble

$$\mathscr{Q} = \left\{ q \in]0, 1[\;\middle|\; -\frac{1}{2} \leq f_{1/2,q}(n, r) \leq \frac{1}{2} \right\},$$

I.12) Pour tout $q \in \mathcal{Q}$, que peut-on dire sur les modèles $M_{1/2}$ et M_q ? (utiliser la règle de décision du Tableau 1).

I.13) Application numérique : Après $n = 200$ lancers, on obtient $r = 115$ fois le côté pile. L'ensemble $\mathcal{Q}$ correspondant est $[0.483, 0.522] \cup [0.627, 0.664]$. Une personne vous assure qu'avec la pièce utilisée, la probabilité d'obtenir "pile" est 1.5 fois supérieure à celle d'obtenir "face". Qu'en pensez-vous ?

Connaissant le résultat r de l'expérience, on souhaite s'assurer que la pièce utilisée était bien équilibrée. Pour ce faire, une première méthode consiste à comparer le modèle de la pièce équilibrée au modèle le plus vraisemblable *a posteriori*. Ce modèle (noté M_{opt}) est celui pour lequel $\mathbb{P}([X_i = 1]) = \hat{q}(n, r)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$; la valeur $\hat{q}(n, r)$ est la probabilité $q \in [0, 1]$ maximisant la probabilité $\mathbb{P}([S_n = r])$ obtenue sous le modèle $\mathbb{P}([X_i = 1]) = q$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

I.14) Calculer $\hat{q}(n, 0)$ et $\hat{q}(n, n)$. Donner l'expression de $\hat{q}(n, r)$.

I.15) Donner l'expression du facteur de Bayes $f_{1/2,opt}(n, r) = \log_{10} p_{1/2}(n, r) - \log_{10} p_{opt}(n, r)$ où $p_{opt}(n, r) := \mathbb{P}([S_n = r])$ lorsque l'on se place sous le modèle M_{opt}.

I.16) Application numérique : en prenant les mêmes valeurs que dans la question II.5), calculer la valeur du facteur de Bayes $f_{1/2,opt}(n, r)$. Conclure.

Une autre méthode pour s'assurer a posteriori de l'équilibre de la pièce consiste à comparer le modèle $M_{1/2}$ au modèle M_{bay} ainsi défini : pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on définit la variable aléatoire Q_N qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\{j/(N+1),\ j = 1, \ldots, N\}$ avec $\mathbb{P}([Q_N = j/(N+1)]) = 1/N$ pour tout $j = 1, \ldots, N$. On suppose que la probabilité d'obtenir le résultat r dépend de la valeur de la variable aléatoire Q_N :

$$\mathbb{P}\big([S_n = r] \,\big|\, [Q_N = j/(N+1)]\big) = \mathbb{P}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = r\right]\right),$$

avec $\mathbb{P}([X_i = 1]) = j/(N+1)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On rappelle que la probabilité d'un événement A sachant qu'un événement B de probabilité non nulle est réalisé est donnée par $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$.

I.17) En utilisant la formule des probabilités totales, donner l'expression (en fonction de n, r et N) de la probabilité $p_{bay}(n, r)$ que la variable S_n soit égale à r sous le modèle M_{bay}.

I.18) Application numérique : Pour $n = 200$, $r = 115$ et $N = 100$ on a

$$\log_{10}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{j}{N+1}\right)^{r}\left(1 - \frac{j}{N+1}\right)^{n-r}\right) = -60.28$$

Calculer la valeur de facteur de Bayes et conclure.

Problème II – Estimation de la production

Lors de la mise sur le marché de son dernier véhicule, un constructeur automobile a souhaité affecter à chaque voiture vendue un numéro. Ainsi, la première voiture vendue s'est vu attribuer le numéro 1, la deuxième, le numéro 2, etc. Ce numéro est clairement visible à l'arrière du véhicule. Au bout d'un an de mise sur la marché, un concurrent souhaite savoir combien de voitures ont été vendues par ce constructeur automobile. Pour ce faire, il dispose uniquement des numéros des voitures qu'il a croisées lors de l'année écoulée.

Notations : le nombre de voitures observées par le concurrent est noté k et les numéros correspondants, rangés par ordre croissant, sont notés $x_1 < \ldots < x_k$. Enfin, le nombre (inconnu) de véhicules vendus est noté N. On a donc forcément $k \leq N$.

On suppose dans la suite que le k-uplet $(x_1 < \ldots < x_k)$ est le résultat de l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard et sans remise k numéros parmi $\{1, \ldots, n\}$. Cette expérience est modélisée par l'espace $(\Omega_k, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ où Ω_k est l'ensemble de tous les k-uplets $(x_1 < \ldots < x_k)$ possibles, $\mathscr{A}$ est la tribu de l'ensemble des parties de Ω_k et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme.

II.1) Quel est (en fonction de N et k) le cardinal de Ω_k.

II.2) Donner l'expression (en fonction de N et k) de la probabilité $\mathbb{P}(\{(x_1 < \ldots < x_k)\})$ d'obtenir le tirage $x_1 < \ldots < x_k$.

On introduit la variable aléatoire $M_k : \Omega_k \to \mathbb{N}$ qui à tout k-uplet $(x_1 < \ldots < x_k) \in \Omega_k$ associe la plus grande valeur x_k.

II.3) Pour $m < k$ ou $m > N$, quelle est la valeur de $\mathbb{P}([M_k = m])$?

II.4) On suppose que m est tel que $k \leq m \leq N$. Quel est le nombre de k-uplets $(x_1 < \ldots < x_k)$ pour lesquels $x_k = m$? En déduire la valeur de $\mathbb{P}([M_k = m])$.

II.5) En utilisant les questions précédentes, montrer que

$$C_N^k := \frac{N!}{k!(N-k)!} = \sum_{m=k}^{N} C_{m-1}^{k-1}$$

où pour tout entier $\ell > 0$, $\ell! = \ell \times (\ell - 1) \times \ldots \times 1$ et avec la convention $0! = 1$.

II.6) Montrer que l'espérance de M_k est donnée par

$$\mathbb{E}(M_k) = \frac{k}{C_N^k} \sum_{m=k}^{N} C_m^k.$$

II.7) En effectuant le changement de variable $\ell = m + 1$ dans la somme ci-dessus et en utilisant le résultat de la question 5), montrer que $\mathbb{E}(M_k) = k(N+1)/(k+1)$.

II.8) On rappelle que le concurrent souhaite estimer le nombre N de véhicules vendus. En utilisant la question précédente, proposer une fonction $\Psi_k(\cdot)$ (indépendante de N évidemment) telle que $\mathbb{E}(\Psi_k(M_k)) = N$. La variable aléatoire $\Psi_k(M_k)$ est un estimateur sans biais de N.

II.9) Calculer $\mathbb{E}[(\Psi_k(M_k))^2]$ et en déduire la variance de l'estimateur $\Psi_k(M_k)$ (Aide : remplacer m^2 par $m(m+1)-m$).

II.10) On suppose que $k = N - \lfloor N^a \rfloor$ avec $a \in]0,1[$, la notation $\lfloor \cdot \rfloor$ étant celle de la partie entière. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (voir le rappel donné à la fin du sujet), montrer que dans ce cas $\Psi_k(M_k) - N$ converge en probabilité vers 0 lorsque $N \to \infty$.

Problème III – Estimation de la taille d'une population

Pour estimer la taille de la population d'une espèce animale, la méthode de "capture-marquage-recapture" (CMR) est couramment utilisée.
Si on note P une population de $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ individus (le nombre N étant inconnu), la méthode CMR consiste à :

(C) tirer au hasard et sans remise $n \in \{1,\dots,N\}$ individus dans la population P ;

(M) marquer les n individus et les remettre dans la population P ;

(R) tirer au hasard et sans remise $m \in \{1,\dots,N\}$ individus dans la population P.

Dans la suite, on raisonnera comme si les N individus de la population étaient numérotés de 1 à N. Ceci n'est évidemment pas le cas en pratique mais permet de simplifier la modélisation du problème sans perte de généralité.
La modélisation probabiliste de la méthode CMR est le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ avec :

- Ω l'ensemble regroupant tous les résultats possible de la méthode CMR. On notera $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ un élément de Ω avec

  ω_1 un vecteur de taille N dont la i-ème composante $\omega_{1,i} = 1$ si l'individu numéro i a été capturé lors de l'étape (C) et 0 sinon ;

  ω_2 un vecteur de taille N dont la i-ème composante $\omega_{2,i} = 1$ si l'individu numéro i a été capturé lors de l'étape (R) et 0 sinon.

- $\mathscr{A}$ la tribu des parties de Ω ;
- $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme.

III.1) Donner la valeur des sommes

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_{1,i} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} \omega_{2,i}.$$

III.2) Quel est le cardinal de l'ensemble Ω ? En déduire la valeur de la probabilité $\mathbb{P}(\{\omega\})$ pour tout $\omega \in \Omega$.

On introduit la variable aléatoire $K : \Omega \to \mathbb{N}$ définie par

$$K(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \omega_{1,i}\omega_{2,i}.$$

III.3) Que peut-on dire lorsque la valeur observée de K est $k \in \mathbb{N}$?

III.4) Si $n + m > N$, donner les valeurs de k pour lesquelles $\mathbb{P}([K = k]) = 0$.

III.5) Donner l'ensemble $E(n, m, N) \subset \mathbb{N}$ des valeurs possibles de K.

III.6) Pour tout $k \in E(n, m, N)$, donner, en fonction de n, m et N l'expression de la probabilité $\mathbb{P}([K = k])$.

III.7) En déduire la relation

$$\sum_{k \in E(n,m,N)} C_n^k C_{N-n}^{m-k} = C_N^m.$$

III.8) En remarquant que $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ et en utilisant la relation ci-dessus, donner l'expression de l'espérance de K.

III.9) Proposer une fonction $\Psi_{n,m}(\cdot)$ telle que $1/\hat{N} := 1/\Psi_{n,m}(K)$ soit un estimateur sans biais de $1/N$. La variable aléatoire $\hat{N}$ est-elle un estimateur sans biais de N?

On suppose à présent que $n + m > N$.

III.10) Donner, en fonction de n, m et N, l'expression de l'espérance de $1/(K + 1)$.

III.11) Utiliser la question précédente pour proposer un estimateur sans biais de N.

Problème IV – Inégalités de Markov et de Cantelli

Dans ce problème, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et on note $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X) = m \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2 + m^2$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on introduit la variable aléatoire $Y_\varepsilon : \Omega \to \{0, 1\}$ définie pour tout $\omega \in \Omega$ par

$$Y_\varepsilon(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |X(\omega)| > \varepsilon, \\ 0 & \text{si } |X(\omega)| \le \varepsilon. \end{cases}$$

IV.1) En posant $p_\varepsilon := \mathbb{P}([|X| > \varepsilon])$, donner l'expression de $\mathbb{E}(Y_\varepsilon)$.

IV.2) Montrer que pour tout $a \in [0, 2]$, $\mathbb{E}(|X|^a) \ge \mathbb{E}(|X|^a Y_\varepsilon)$.

IV.3) En déduire l'inégalité de Markov : pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $a \in [0, 2]$,

$$\mathbb{P}([|X| > \varepsilon]) \le \frac{\mathbb{E}(|X|^a)}{\varepsilon^a}.$$

IV.4) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$, $\mathbb{P}([X - \alpha > \varepsilon]) \le \mathbb{P}([|X - \alpha| > \varepsilon])$.

IV.5) En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}([X - m + \lambda > \varepsilon + \lambda]) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(\varepsilon + \lambda)^2}.$$

IV.6) Après avoir fait l'étude de la fonction $\lambda \in [0, \infty[\mapsto (\sigma^2 + \lambda^2)/(\varepsilon + \lambda)^2$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, la meilleure majoration est donnée par

$$\mathbb{P}([X - m > \varepsilon]) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 + \sigma^2}.$$

IV.7) En vous inspirant des questions précédentes, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}([X - m < -\varepsilon]) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 + \sigma^2}.$$

IV.8) En déduire l'inégalité de Cantelli : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}([|X - m| > \varepsilon]) \leq \frac{2\sigma^2}{\varepsilon^2 + \sigma^2}.$$

IV.9) Pour quelles valeurs de $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Cantelli est-elle préférable à celle de Bienaymé-Tchebychev ?

Rappel : Pour toute variable aléatoire X de variance σ^2 et d'espérance $m \in \mathbb{R}$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}([|X - m| > \varepsilon]) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve de français

Durée : 2h

Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas*, *c'est-à-dire*, *le plus grand*, comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé.

Vous placerez une simple barre tous les 10 mots et une double barre tous les 50 mots. Vous indiquerez le total des mots utilisés. Vous écrirez une ligne sur deux pour faciliter la correction.

La pandémie de covid-19, suivie d'un confinement planétaire, a constitué une épreuve. Elle a frappé les corps, inquiété les esprits, révélé nos fragilités personnelles et collectives. En faisant surgir le spectre de la maladie et de la mort, elle a rappelé chacun à sa vulnérabilité fondamentale. Il a suffi de quelques jours pour que projets et routines sociales soient mis entre parenthèses. L'illusion d'immortalité, qui tient lieu de socle à nos conduites ordinaires, s'est fissurée.

Par son ampleur, cet événement a renouvelé la réflexion sur la notion d'épreuve. Ce terme polysémique, qui désigne aussi bien l'examen passé par l'étudiant, l'essai d'imprimerie, la probation du condamné ou le drame existentiel, plonge ses racines dans l'Antiquité. On le retrouve chez Sénèque, où il renvoie à la « mise à l'épreuve » de soi face à l'adversité de la vie. Dans chacune des religions monothéistes, il apparaît comme une probation envoyée par Dieu. En envoyant une série d'épreuves à Job, Dieu teste ainsi sa persévérance et sa foi. Dans la philosophie existentialiste et la psychologie de la santé, débarrassée de sa part transcendante, cette notion prend un sens plus passif. Elle est d'abord une difficulté « éprouvée » dans sa chair, une douleur ou une peine. À quoi reconnaît-on une épreuve ? Le psychologue Gustave-Nicolas Fischer distingue dans *Le Ressort invisible* (2014) six catégories d'expériences extrêmes qui, toutes, ont pour point commun d'ébranler la vie : la maladie potentiellement mortelle ; la guerre ou la torture ; la catastrophe ou l'attentat ; la privation de liberté ; la perte ; la dépendance liée à l'âge. Le simple fait de vivre, de continuer à exister, qui va de soi quand tout va bien, se voit brutalement questionné et menacé. Moins directement mais avec une cruauté parfois redoutable, la séparation et le deuil peuvent également engendrer une spirale mortifère. « On meurt encore d'amour », rappelle Claire Marin. Les sentiments d'isolement, de désarroi et d'abandon peuvent quant à eux briser autant qu'un virus. Les humains sont des êtres d'attachement, qui se construisent dans la relation, l'amour et l'échange. « Autrui, pièce maîtresse de mon univers…, découvre Robinson Crusoé dans la solitude de son île. Je mesure chaque jour ce que je lui devais en enregistrant de nouvelles fissures dans mon édifice personnel ». À l'échelle collective, ce sont des entreprises, des peuples ou des civilisations qui entrevoient un risque mortel sous l'effet d'une crise, d'une guerre ou d'une épidémie.

Les sciences sociales, notamment la sociologie clinique, documentent combien une maladie grave ou un licenciement peuvent entraîner une césure dans la trame existentielle. Ils font « sortir une vie sociale de sa trajectoire escomptée » (Danilo Martuccelli), enclenchent une « rupture avec les routines de l'existence » (Vincent Caradec). Certaines « blessures morales », comme les appelle Axel Honneth, peuvent apparaître. Le rapport à soi et aux autres change, tout comme se transforment nos manières de voir le monde et de nous y comporter.

C'est pourquoi les épreuves engagent toujours un processus réflexif. Qu'il s'agisse de maladie, de divorce, de deuil, de perte d'emploi, d'accident de la route, de crise sanitaire ou économique, elles font surgir de l'incertitude et du questionnement : faut-il donner sens à ce qui nous arrive ? S'agit-il d'un simple accident ou d'un avertissement ? d'une parenthèse ou d'une rupture ? d'une chance ou d'une malédiction ? Et comment s'en sortir ?

Les réponses apportées à ces questions varient beaucoup selon les individus et les contextes. Certaines personnes vont se placer dans une posture de combat, se documenter intensément, chercher à reprendre le contrôle de la situation ; d'autres à l'inverse vont fuir ou se déconnecter. Les Anglo-Saxons ont un mot pour exprimer ces différentes manières de « faire face » (*to cope with*) : le *coping*. Ils en distinguent trois formes principales. Le *coping* centré sur le problème est orienté vers l'action. Il s'agira, par exemple, de s'informer tous azimuts sur sa maladie, de tester un nouveau traitement, de lancer un vaste plan pour reprendre le contrôle d'une situation… Le *coping* centré sur les émotions consistera plutôt à modifier son attitude face au problème, en prenant de la distance, en cherchant du soutien émotionnel, en méditant ou en prenant soin de soi. Enfin, le *coping* évitant relève de la fuite. La personne se déconnecte, fuit le problème et se réfugie ailleurs (dans des drogues, des relations sans lendemain, le sport ou le voyage). Le neurobiologiste français Henri Laborit rassemblait cette gamme d'attitudes dans *Éloge de la fuite* (1974) : « Confronté à une épreuve, l'homme ne dispose que de trois choix : combattre, fuir, ne rien faire ».

L'une de ces stratégies est-elle plus protectrice que les autres ? À première vue, l'attitude de combat semble la mieux à même de nous sauver. Elle est aussi la plus valorisée. « Il faut vous battre ! », dit l'avocat à sa victime ou le médecin au malade. Mais cette injonction n'est pas toujours audible. Car comment trouver la force de lutter quand on est dévasté par le chagrin ou épuisé par la maladie ? Et contre qui, contre quoi, quand il n'y a pas d'ennemi tangible ? Lorsque la situation est hors de contrôle, la bataille peut aussi se muer en un acharnement déraisonnable, aussi vain qu'épuisant pour celui qui la conduit.

Vaut-il alors mieux fuir ? Dans nos sociétés, la fuite est souvent perçue comme une lâcheté, une forme de capitulation, un mensonge fait à soi-même. Or on peut fuir de différentes manières : errer et se perdre, ou bien rompre pour se reconstruire ailleurs, autrement. Henri Laborit rappelle que la fuite recèle des vertus dans des situations inexorables. S'enfuir d'un pays en guerre, quitter un conjoint violent, changer de cap professionnel quand l'horizon se bouche, s'extraire d'une amitié toxique sont autant de façons de prendre son destin en main. Ce sont des actes de courage plutôt que de renoncement.

De même, « ne rien faire » correspond en réalité à un vaste camaïeu de postures : la loyauté de l'épouse trompée qui reste au foyer par habitude ou sens du devoir, l'apathie de l'agent épuisé ou déclassé, dont la résistance aurait un coût psychologique trop important, le repli du malade qui préserve ce qui lui reste de forces et d'humanité. Le sociologue Vincent de Gaulejac s'est notamment intéressé aux victimes des camps de concentration, d'attentats ou de viol. Il a souvent observé un moment de « déconnexion », qui peut passer pour de la passivité, où le sujet semble comme absent à lui-même. Il s'agit plutôt selon lui d'une façon de se fabriquer un cocon protecteur, pour mieux se recentrer. La déconnexion, souligne le sociologue, permet de « ne pas avoir à réfléchir, à choisir, à se tourner vers son passé ou son avenir, mais vivre juste le moment présent, pour ne plus se poser de questions. Juste se préoccuper de savoir “comment survivre” en abandonnant la question du sens, “pourquoi vivre” »[1]. On retrouve une telle posture dans les récits de Primo Lévi ou Robert Antelme, prisonniers des camps[2], ou dans les témoignages des victimes de torture[3].

1. Vincent de Gaulejac, *Qui est « je » ? Sociologie clinique du sujet*, Seuil, 2009.
2. Primo Levi, *Si c'est un homme*, 1947 ; Robert Antelme, *L'Espèce humaine*, 1947.
3. Muriel Montagut, *L'Être et la Torture*, PUF, 2014.

Que reste-t-il de telles expériences quand la menace vitale s'éloigne ? Il n'existe pas de scénario type de reconstruction. Chaque sujet ouvre son propre chemin. La capacité de rebond dépend de mille facteurs : la gravité du drame enduré, son impact social, la possibilité de retrouver une estime de soi, de pouvoir compter sur des proches aimants, de donner du sens à son histoire, de se tourner vers de nouveaux projets, de refaire confiance quand l'autre nous a blessé.

Le formidable succès de la notion de résilience témoigne de cette aspiration fondamentale : tout être humain espère qu'il est possible de retrouver sa force et sa joie de vivre après la traversée d'un cataclysme. Peut-être même pourrions-nous découvrir, dans le creux de l'épreuve, les ressources pour nous inventer une vie plus belle, plus libre, plus authentique ? C'est ce que postule le courant de la croissance posttraumatique. Gustave-Nicolas Fischer, qui en est le plus célèbre représentant francophone, insiste sur ce point : toute épreuve, qu'elle soit individuelle ou collective, nous permet de découvrir nos « ressorts invisibles ». La notion de ressort suggère la capacité de résistance et le potentiel de flexibilité humaine. Comme le roseau de Pascal, qui plie mais ne rompt pas, nous serions capables de plier et de nous replier face au malheur, mais aussi de nous redresser fièrement et de rebondir après l'épreuve.

L'épreuve vitale serait-elle finalement une chance ? Chance de mieux se connaître, chance de s'améliorer, de repenser ses priorités ? La philosophe Claire Marin, dans *Ruptures* (2019), met en garde contre ce mirage de la flexibilité généralisée. On peut également rompre après un malheur, finir en morceaux, cassé, abîmé, avec des cicatrices à jamais. On peut aussi mourir, ne jamais se relever. Ou encore se voir confronté à la chronicisation du mal, ne jamais tout à fait en sortir, alterner sur la durée les phases de répit et de crise. Le neuropsychiatre Boris Cyrulnik, qui a pourtant largement participé au succès de la notion de résilience, affirme lui-même qu'un malheur n'est jamais merveilleux. « C'est une fange glacée, une boue noire, une escarre de douleur » dont on sort sinon abîmé, du moins un peu hagard et profondément changé. « Vu de l'extérieur, la fréquence de la résilience prouve qu'on peut s'en sortir, précise le neuropsychiatre qui a perdu lui-même ses parents dans les camps de concentration lorsqu'il était enfant. Vu de l'intérieur, on est structuré comme un oxymoron qui révèle la division intime de l'homme blessé, la cohabitation du ciel et de l'enfer, le bonheur sur le fil du rasoir »[4].

Ce « bonheur sur le fil du rasoir », c'est celui de l'orphelin, de la femme blessée qui réapprend à aimer, de la mère qui commence à revivre après la perte d'un enfant, de l'étudiant qui trouve enfin sa voie après des années de souffrance scolaire, de l'ouvrier qui sait sa précarité, du convalescent intranquille… Un indice de notre condition humaine, en somme. Mortels et conscients de l'être, nous sommes animés malgré tout d'une puissante force de vivre. Entre « avant » et « après », cet élan vital joue souvent le trait d'union ; on n'est ni vraiment le même, ni tout à fait un autre.

Héloïse Lhérété, « Revivre après une épreuve »
Revue Sciences Humaines n°328, août-septembre 2020, pages 32-35.

4. Boris Cyrulnik, *Un merveilleux malheur*, Paris, Odile Jacob, 2002.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve d'anglais

Durée : 2h

L'épreuve est constituée de deux parties : un résumé et une traduction. Vous rédigerez ces deux parties sur **deux copies séparées**, sur lesquelles vous indiquerez respectivement « Anglais / résumé » et « Anglais / traduction ».

1 Summarize this text in English in 220 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

In poor countries, statistics are both undersupplied and underused
Governments often lack incentives to collect, share and use data
The Economist, April 10 2021

In the rich world, people worry that prying governments know too much about them. Popular culture valorises characters who go off the grid, like Jack Reacher (the hero of 25 novels by Lee Child and two films starring Tom Cruise). He drifts around America on Greyhound buses, eschewing a driving licence, credit cards and email. Why does he make himself so hard to find? “It started out as an exercise and became an addiction,” he says.

The developing world, however, is full of unwitting Jack Reachers who leave little trace in official records. Their anonymity is not an addiction but an affliction. According to the World Bank’s latest World Development Report, entitled “Data for Better Lives”, about 1bn people have no official proof of their identity. More than a quarter of the world’s children under five are not registered at birth. Half of the 29 poorest countries have not completed a census in the past ten years—Congo has not done one since 1984—and only 40% have three or more estimates of poverty that can be compared across time. Christopher Yeh of Stanford University and his colleagues have calculated that an African household will appear in a representative survey of living standards less than once every 1,000 years.

Given the shortage of conventional statistics, many people are enthusiastic about more novel forms of data, gleaned from mobile phones, social media and satellite imagery. In the early months of the covid-19 pandemic, patterns of mobile-phone use showed who could and could not afford to stay at home in a city like Jakarta, outlining the uneven impact of lockdown measures in many developing countries. That kind of data can help donors better target their aid efforts. Emily Aiken of the University of California, Berkeley, and her colleagues have tested whether a machine-learning algorithm can identify the poorest households in 80 Afghan villages based on mobile-phone data, such as the duration of their calls, their network of contacts, and how often they paid for more minutes of call-time. For the 80% of households that owned a mobile phone, the algorithm worked about as well as more traditional targeting methods, such as counting fridges, clothes irons, and other physical assets.

But, as the study’s authors are careful to note, not everyone owns a mobile phone. And algorithms that work in one place and time may not necessarily travel well or endure for long. Joshua Blumenstock of Berkeley has pointed out that international calls may be a less reliable indicator of prosperity during the Haj pilgrimage season, when many more people travel.

Satellite imagery avoids some of these problems—cameras in orbit can see how the other half lives. Countries can sharpen poverty maps by combining household surveys with clues visible from space, including building sizes, forest cover, and the intensity of night-time lights. Tanzania was able to turn a poverty map divided into 20 mainland regions (containing populations of over 2m on average) into a higher-resolution poverty map of 169 districts (containing average populations of 300,000 or so). The extra precision provided by satellite data was equivalent to increasing the sample size of a household survey by five times, according to Takaaki Masaki of the World Bank and his co-authors.

These techniques can all improve the supply of data. But supply is not the only problem. If it were, you would expect any figures a government did collect to be highly prized, widely disseminated and heavily used. But the opposite is too often the case. Data are rarely shared with outsiders. And they are poorly digested even within official circles. Daniel Rogger and Ravi Somani of the World Bank once asked over 1,800 officials in Ethiopia how many people lived in their districts. About half of them thought their districts were at least 50% bigger or smaller than they actually were, according to figures in their own databases. Education officials over- or underestimated primary-school enrolment numbers by 76%. When asked, less than 13% said that these administrative databases were their main source of information.

Governments often lack a strong incentive to collect data, use them well, or allow others to use them better. Bureaucrats with little discretion to make decisions have scant reason to inform themselves about what the right decision would be. And in countries that lack strong safeguards to prevent data misuse, civil servants understandably hold numbers close to their chests. Moreover, statistics can be most valuable when holding governments to account. Why should governments conspire in their own embarrassment by providing the data by which they will be judged?

For this reason, the authors of the World Development Report call for something akin to a cultural shift in the handling of data. They advocate for "political champions" who recognise data's value in improving policies and a data-literate press and public who demand better numbers to draw on. This political commitment to data would, in turn, generate incentives for civil servants to make better use of the figures at their disposal. The mindset of ministries can be as important as a government's financial wherewithal. According to new indicators from the World Bank, a country's statistical performance is only loosely correlated with its prosperity. Some countries, like Kyrgyzstan or Mexico, do much better than you would expect given their level of GDP per person.

In this vision, private data and official statistics are complements, not substitutes, that can be of use for either corporate or public purposes. One current example is the Gallup World Poll, carried out by the private polling firm in over 140 economies. Every three years, it adds questions on financial inclusion instigated by the World Bank. This polling showed that 1.7bn people lacked a formal bank account in 2017. That gap is both a potential business opportunity for financial firms and a problem for governments. After all, even Jack Reacher has a bank account.

2 Translate the following text into French

The war against money-laundering is being lost

The global system for financial crime is hugely expensive and largely ineffective

The Economist / Apr 12th 2021

Yet another bank is preparing to face the music over alleged failings in its efforts to curb flows of dirty money. In the coming weeks NatWest, one of Britain's largest lenders, is set to appear in court in London to respond to charges that it failed to properly scrutinise a gold-dealing client that deposited £365m ($502m) with the bank—£264m of it in cash.

NatWest (which has said it is co-operating with investigators) is the latest lender to be accused of falling short in the fight against dirty money. Last year global banks were hit with $10.4bn in fines for money-laundering violations, an increase of more than 80% on 2019, according to Fenergo, a compliance-software firm. In January Capital One, an American bank, was fined $390m for failing to report thousands of fishy transactions. Danske Bank is still dealing with the fallout of a scandal that erupted in 2018. Over $200bn of potentially dirty money was washed through the Danish lender's Estonian branch while executives missed or ignored a sea of red flags.

These cases imply that banks remain the Achilles heel in the global war on money-laundering, despite the reams of regulations aimed at turning them into frontline soldiers in that conflict. However, closer examination suggests that the global anti-money-laundering (AML) system has serious structural flaws, largely because governments have outsourced to the private sector much of the policing they should have been doing themselves.