Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2022

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants.

Exercice 1. Valeurs prises par une fonction

On note $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$,

$$\mathscr{C} := \left\{ f \in E \,;\, \forall\, t \in [0,1]\ f(t) \geqslant 0 \text{ et } f \text{ est non nulle} \right\}$$

$$\text{et} \quad \mathscr{C}' := \left\{ f \in E \,;\, \forall\, t \in [0,1]\ f(t) \geqslant 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \right\}.$$

On considère, pour tout élément g de E, l'application Φ_g suivante :

$$\Phi_g : \begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \dfrac{\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t} \end{array}.$$

L'objet de l'exercice est de déterminer les valeurs prises par l'application Φ_g.

1. Soit $g \in E$.
   (a) Prouver l'égalité : $\Phi_g(\mathscr{C}) = \Phi_g(\mathscr{C}')$.
   (b) Soit f_1 et f_2 deux éléments de $\mathscr{C}'$ avec $a_1 = \Phi_g(f_1)$ et $a_2 = \Phi_g(f_2)$.
   On suppose $a_1 \leqslant a_2$. Prouver l'inclusion $[a_1, a_2] \subset \Phi_g(\mathscr{C})$.
2. Dans cette question on suppose que, pour tout réel $t \in [0,1]$, $g(t) = t$.
   (a) Prouver l'inclusion : $\Phi_g(\mathscr{C}) \subset [0,1]$. Les réels 0 et 1 sont-ils éléments de Φ_g ?
   (b) Montrer que $\sup \Phi_g(\mathscr{C}) = 1$.
   On pourra, pour tout entier naturel n, calculer $\Phi_g(f_n)$ où $f_n : t \mapsto t^n$.
   (c) i. Calculer, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 t(1-t)^n\,\mathrm{d}t$.
   ii. En déduire que $\inf \Phi_g(\mathscr{C}) = 0$.
   (d) Conclure que $\Phi_g(\mathscr{C}) =]0,1[$.
3. Dans cette question on suppose que, pour tout réel $t \in [0,1]$, $g(t) = \mathrm{e}^t$.
   (a) Prouver l'inclusion : $\Phi_g(\mathscr{C}) \subset]1,\mathrm{e}[$.
   (b) On considère la fonction

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & \dfrac{\alpha}{\alpha+1}\,\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha+1}-1}{\mathrm{e}^{\alpha}-1} \end{array}.$$

   i. Montrer que la fonction h est prolongeable par continuité en 0.
   ii. Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} h(\alpha)$ et $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} h(\alpha)$.
   (c) Prouver l'égalité : $\Phi_g(\mathscr{C}) =]1,\mathrm{e}[$.
4. Dans cette question on traite le cas général où l'application g est élément de E et supposée non constante.

(a) Justifier l'existence d'un couple (a,b) de réels distincts de $[0,1]$ tel que, pour tout $t \in [0,1]$, $g(a) \leqslant g(t) \leqslant g(b)$.

On suppose désormais que a et b sont dans $]0,1[$ et on note N un entier naturel tel que $0 < b - \dfrac{2}{N} < b + \dfrac{2}{N} < 1$.

On considère, pour tout entier $n \geqslant N$, la fonction f_n qui vaut

$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant b - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} \quad \text{ou} \quad b + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \leqslant t \leqslant 1 \\ \\ 1 & \text{si} \quad b - \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant b + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

et qui est affine sur les segments $\left[b - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}, b - \dfrac{1}{n}\right]$ et $\left[b + \dfrac{1}{n}, b + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right]$.

(b) Représenter le graphe de la fonction f_n.

(c) Prouver, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, l'équivalence : $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{2}{n}$.

(d) Prouver l'existence d'un réel $K > 0$ (ne dépendant que de g) tel que, pour tout entier $n \geqslant N$,

$$\int_0^{b-\frac{1}{n}} f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{K}{n^2} \quad \text{et} \quad \int_{b+\frac{1}{n}}^1 f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{K}{n^2}.$$

(e) Soit G une fonction réelle définie au voisinage de b et dérivable en b.

Que vaut $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{G(b+h)-G(b-h)}{h}$?

(f) Prouver l'égalité : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} \int_{b-\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} g(t)\,\mathrm{d}t = g(b)$.

(g) En déduire que $\sup \Phi_g(\mathscr{C}) = g(b)$.

On montrerait de même, et on l'admet, que $\inf \Phi_g(\mathscr{C}) = g(a)$.

5. Soit $g \in E$. Que vaut $\Phi_g(\mathscr{C})$?

On cherchera à quelle condition $\displaystyle\max_{t\in[0,1]} g(t)$ *est élément de* $\Phi_g(\mathscr{C})$.

Exercice 2. Une suite binomiale

Soit n un entier naturel non nul. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré au plus n et E^* son dual c'est-à-dire le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E. On note, pour tout entier naturel k, $P^{(k)}$ le polynôme dérivé k-ième d'un polynôme P (avec $P^{(0)} = P$).

On note $P_0 = 1$ et, pour tout entier naturel k non nul, $P_k = X(X-k)^{k-1}$ (on a donc $P_1 = X$).

1. Montrer que la famille $\mathscr{B} := (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E.

2. On note, pour tout entier r de $[\![0,n]\!]$, φ_r l'application qui, à chaque polynôme P de E, associe $\varphi_r(P) = \dfrac{1}{r!} P^{(r)}(r)$ (on a donc $\varphi_0(P) = P(0)$).

(a) Soit $(k,r) \in [\![0,n]\!]$. Calculer $P_k^{(r)}$.
On distinguera les cas $k > r$, $k < r$ et $k = r$.

(b) Calculer, pour tout couple (k,r) d'entiers distincts de $[\![0,n]\!]$, la valeur de $\varphi_r(P_k)$.

(c) Calculer, pour tout entier k de $[\![0,n]\!]$, la valeur de $\varphi_k(P_k)$.

(d) Soit $P \in E$. Établir l'égalité : $P = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(P) P_k$.

(e) Montrer que $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^*.

3. Établir, pour tout couple (x,y) de nombres réels, l'égalité :

$$(x+y)^n = y^n + x \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x-k)^{k-1} (y+k)^{n-k}.$$

On pourra considérer le polynôme $(X+y)^n$.

4. Établir, pour tout couple (x,y) de réels, l'égalité :

$$P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k(x) P_{n-k}(y).$$

Exercice 3. Étude d'une variable aléatoire

On note, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $a(n,p)$ le nombre de p-listes $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ telles que $\sum_{i=1}^{p} x_i = n$. *On a donc $a(n,1) = 1$.*

1. (a) Déterminer, pour tout entier naturel n, la valeur de $a(n,2)$.

   (b) Prouver, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, l'égalité : $\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$.

2. Établir, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, l'égalité : $a(n,p+1) = \sum_{k=0}^{n} a(n-k,p)$.

3. Établir, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, l'égalité : $a(n,p) = \binom{n+p-1}{p-1}$.

4. En déduire que, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, le nombre de p-listes $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^p$ telles que $\sum_{i=1}^{p} x_i = n$ vaut $\binom{n-1}{p-1}$.

On munit, pour tout entier naturel n non nul, l'ensemble Ω des parties à n éléments de $[\![1,2n]\!]$ de la tribu pleine et de la probabilité uniforme notée $\mathbf{P}$.

On appelle **bloc** d'une partie A élément de Ω, tout sous-ensemble de A de la forme $[\![a,b]\!]$ où

$$1 \leqslant a \leqslant b \leqslant 2n \text{ avec } (a = 1 \text{ ou } a-1 \notin A) \text{ et } (b = 2n \text{ ou } b+1 \notin A).$$

Par exemple, dans le cas où $n = 3$, la partie (de $[\![1,6]\!]$) $\{1,2,5\}$ a deux blocs ($[\![1,2]\!]$ et $\{5\}$) alors que, dans le cas où $n = 4$ la partie (de $[\![1,8]\!]$) $\{2,4,6,7\}$ a trois blocs ($\{2\}$, $\{4\}$ et $[\![6,7]\!]$).

On note, pour tout entier naturel n non nul, X_n la variable aléatoire qui, à chaque partie A à n éléments de $[\![1,2n]\!]$, associe le nombre de blocs de A. *La variable* X_1 *est donc constante égale à* 1*.*

5. (a) Déterminer la loi de X_2 et son espérance.
   (b) Déterminer la loi de X_3 et son espérance.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Calculer $\mathbf{P}(X_n = 1)$ et $\mathbf{P}(X_n = n)$.
   (b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Montrer que la donnée d'une partie A à n éléments de $[\![1,2n]\!]$ avec k blocs équivaut à la donnée d'une liste $(j_0, i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_{k-1}, j_{k-1}, i_k, j_k)$ où $i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_{k-1}$ sont des entiers naturels non nuls et j_0 et j_k des entiers naturels vérifiant les conditions
   $$\sum_{r=1}^{k} i_r = n \quad \text{et} \quad \sum_{r=0}^{k} j_r = n.$$
   (c) En déduire, pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, l'égalité : $\mathbf{P}(X_n = k) = \dfrac{\binom{n-1}{k-1}\binom{n+1}{k}}{\binom{2n}{n}}$.
   (d) i. Calculer l'espérance de la variable X_n.
       ii. Calculer la variance de la variable X_n.

7. Prouver, pour tout $\varepsilon > 0$, l'égalité :
   $$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance $2n$ fois une pièce équilibrée et on note $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n})$ la suite de résultats obtenus (avec $\varepsilon_i = 1$ (resp. 0) si le i-ème lancer a donné pile (resp. face)). Quelle est la probabilité d'obtenir une telle suite comportant n fois le 1 avec exactement k blocs de 1 ?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2022

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

On rappelle que la **fonction Gamma** d'Euler est définie par

$$\forall\, x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt \tag{1}$$

qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle vérifie la formule récursive $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, valable pour tout réel strictement positif x.

Cette fonction intervient à maintes reprises dans la suite.

L'énoncé est divisé en quatre parties largement indépendantes, que les candidats ne sont pas tenus de traiter dans l'ordre.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Partie I Un lien avec loi de Poisson

Dans cette partie, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$ et on suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre n .

1. Justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}([X_n>k])$ tend vers 0 quand l'entier k tend vers l'infini.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

   a) Justifier, pour tout entier naturel k, l'égalité :
$$\mathbf{P}([X_n>k])=\mathbf{P}([X_n>k-1])-\frac{n^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-n}\,.$$

   b) En utilisant le résultat précédent et une intégration par parties, établir que :
$$\forall\, k\in\mathbb{N},\quad \mathbf{P}([X_n>k])=\frac{1}{k!}\int_0^n t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \tag{2}$$

3. Soit $k\in\mathbb{N}$.

   a) Préciser la limite de $\mathbf{P}([X_n>k])$ quand n tend vers l'infini.

   b) En utilisant (2), justifier que $\mathbf{P}([X_n\leq k])$ est équivalent à $\dfrac{n^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-n}$ quand n tend vers l'infini.

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $I_n=\displaystyle\int_0^n t^{2n}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

   a) Justifier l'encadrement : $\dfrac{n^{2n+1}}{2n+1}\,\mathrm{e}^{-n}\leq I_n\leq\dfrac{n^{2n+1}}{2n+1}$.

   b) En déduire la limite de I_n quand n tend vers l'infini.

   c) Démontrer que I_n est négligeable devant $(2n)!$ quand n tend vers l'infini (on pourra utiliser la propriété (2)).

Partie II La fonction Γ comme transformée intégrale

On note S l'ensemble des fonctions réelles f définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, telles que, pour tout couple (n,p) de nombres entiers positifs ou nuls, la fonction $t\longmapsto t^p f^{(n)}(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

5. Pour quelles valeurs réelles de a la fonction $t\longmapsto \mathrm{e}^{at}$ est-elle un élément de S?

6. Soit k un nombre entier strictement positif et f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall\, t \geq 0, \quad f_k(t) = \exp(-t^k)\ .$$

a) Montrer que, pour tout entier positif n, il existe un polynôme $P_{k,n}$ de $\mathbb{R}[X]$ tel que la dérivée n-ième de f_k vérifie :

$$\forall\, t \geq 0, \quad f_k^{(n)}(t) = P_{k,n}(t)\, f_k(t)\ .$$

b) En déduire que f_k est un élément de S.

7. Montrer que, pour tout élément f de S et tout réel $x > 0$, la fonction $t \longmapsto t^{x-1} f(t)$ est intégrable sur $]\,0, +\infty\,[$.

Pour tout $f \in S$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $G(f)$ par :

$$\forall\, x > 0, \quad G(f)(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} f(t)\, \mathrm{d}t \tag{3}$$

8. a) Exprimer, pour tout entier strictement positif k, la fonction $G(f_k)$ à l'aide de la fonction Gamma.

b) Donner un équivalent de la fonction Γ en 0 et en déduire que, pour tout $x > 0$, $G(f_k)(x)$ tend vers $\dfrac{1}{x}$ lorsque k tend vers l'infini.

9. Montrer que, pour tout élément f de S, la fonction $G(f)$ est de classe C^∞ sur $]\,0, +\infty\,[$.

10. Dans cette question, on suppose que f est une fonction à valeurs strictement positives qui appartient à S.

a) Montrer que $\big(G(f)\big)(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

b) Montrer que $\big(G(f)\big)(x)$ est équivalent à $f(0)/x$ quand x tend vers 0.

c) Montrer que la fonction $G(f)$ admet un minimum global, atteint en un point unique.

Partie III Application au prolongement de la fonction ζ de Riemann

Pour tout élément f de l'espace S défini dans la deuxième partie du problème, on associe la fonction $Z(f)$ définie sur $]\,0, +\infty\,[$ par :

$$\forall\, x > 0, \quad Z(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} t^{x-1} f(t)\, \mathrm{d}t \tag{4}$$

11. Soit f un élément de S .

a) Montrer que la dérivée f' de f appartient à S et vérifie :

$$\forall\, x>0\,,\quad G(f')(x+1)=-\,x\,G(f)(x)\,.$$

b) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\forall\, x>0\,,\quad Z(f^{(n)})(x+n)=(-1)^n\,Z(f)(x)\,.$$

c) Montrer qu'on peut définir, de manière cohérente, un prolongement $\overline{Z(f)}$ de $Z(f)$ à $\mathbb{R}$, en posant, pour tout nombre réel x et tout nombre entier n tel que $n>-x$:

$$\overline{Z(f)}(x)=(-1)^n\,Z(f^{(n)})(x+n)\,.$$

d) Montrer que $\overline{Z(f)}$, ainsi défini, est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\overline{Z(f)}(-n)=(-1)^n\,f^{(n)}(0)\,.$$

12. Dans cette question, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{e^t-1} & \text{si } t>0\\ 1 & \text{si } t=0\end{cases}$.

a) Justifier la validité des deux développements en série suivants :

(i) $\quad\forall\, t>0\,,\quad f(t)=t\,e^{-t}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nt}$

(ii) $\quad\forall\, t\geq 0\,,\quad f(t)=\dfrac{1}{1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^n}{(n+1)!}}$.

b) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.

c) Pour tout nombre entier strictement positif k, montrer que la série de terme général $n^k e^{-n}$ est convergente et que sa somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^k e^{-n}$ majore la valeur absolue de la dérivée k-ième de la fonction $t\longmapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nt}$ sur l'intervalle fermé $[1,+\infty[$.

d) En déduire que f est un élément de S.

13. On rappelle que la **fonction Zêta** de Riemann est définie par :

$$\forall\ x>1,\quad \zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x} \tag{5}$$

a) Démontrer que, pour l'élément f de S défini dans la question précédente, on a :

$$\forall\ x>0,\quad Z(f)(x)=x\,\zeta(x+1)\,.$$

b) La propriété précédente permet de prolonger la fonction ζ à la droite réelle privée de 1 en posant :

$$\forall\ x\neq 1,\quad \overline{\zeta}(x)=\frac{1}{x-1}\,\overline{Z(f)}(x-1)\,.$$

En utilisant un développement limité de f, calculer ses valeurs en $\overline{Z(f)}(0)$ et $\overline{Z(f)}(-1)$.

Partie IV Un autre prolongement

Dans cette partie, P et Q désignent deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, non nuls et **premiers entre eux**, et on note $E(P,Q)$ l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$P\ y'' + Q\ y' + (Q-P)\ y = 0 \tag{6}$$

Autrement dit, $E(P,Q)$ est l'ensemble des fonctions réelles f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad P(x)\, f''(x) + Q(x)\, f'(x) + \big(Q(x) - P(x)\big)\ f(x) = 0\ .$$

14. a) Montrer que $E(P,Q)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel qui contient la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

    b) Montrer que, si $E(P,Q)$ contient une fonction de la forme $x \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $\lambda \neq -1$, les polynômes P et Q sont nécessairement constants.

    c) Trouver $E(P,Q)$ lorsque P et Q sont constants (non nuls) .

15. On suppose, dans cette question, que le polynôme P possède une unique racine réelle a et on note Φ l'application linéaire de $E(P,Q)$ dans $\mathbb{R}^4$ qui associe à tout élément f de $E(P,Q)$ le vecteur :

$$\Phi(f) = \big(f(a-1), f'(a-1), f(a+1), f'(a+1)\big)\ .$$

    a) En utilisant le théorème de Cauchy linéaire, montrer que l'application Φ est injective.

    b) Montrer qu'il n'existe pas d'élément f de $E(P,Q)$ vérifiant :

$$\begin{cases} f(a-1) = f'(a-1) = 0 \\ f(a+1) = -f'(a+1) = \mathrm{e}^{-(a+1)} \end{cases}\ .$$

    c) Déduire des résultats précédents que la dimension de l'espace vectoriel $E(P,Q)$ est au plus égale à 3.

    d) Montrer que, si $P(X) = X^3$ et $Q(X) = -1$, la dimension de l'espace vectoriel $E(P,Q)$ est égale à 3.

16. a) Montrer que la fonction $\Delta :\ x \longmapsto \dfrac{\Gamma(\frac{x}{2})}{\Gamma(x)}$, définie sur $]\,0, +\infty\,[$, vérifie la formule récursive :

$$\forall\ x > 0,\quad \Delta(x+2) = \frac{\Delta(x)}{2(x+1)}\ .$$

    b) En utilisant la fonction $f_2 : t \longmapsto \exp(-t^2)$ définie dans la deuxième partie, montrer que la fonction Δ admet un prolongement $\overline{\Delta}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad \overline{\Delta}(x) = 2\,(x+1)\,\overline{\Delta}(x+2)\ .$$

    c) Comment utiliser une équation différentielle de la forme (6) pour trouver une formule récursive satisfaite à la fois par les fonctions constantes et par la fonction $\overline{\Delta}$?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2022

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h

Le sujet est composé d'un problème, divisé en trois parties, et d'un exercice qui peuvent être traités indépendamment. La notation tiendra largement compte de la clarté et de la précision des réponses.

Quelques rappels

- Un espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ où Ω est un ensemble quelconque appelé l'univers, $\mathscr{A}$ est une tribu de partie de Ω et $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur l'espace $(\Omega, \mathscr{A})$. Les éléments de $\mathscr{A}$ sont des sous-ensembles de Ω appelés événements.
- Dans le cas où l'univers Ω est de cardinal fini, on prend $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, l'ensemble contenant tous les sous-ensembles de Ω. Il est à noter que l'ensemble vide $\emptyset$ est un élément de $\mathscr{P}(\Omega)$. La mesure de probabilité $\mathbb{P}$ est alors entièrement caractérisée par l'ensemble des valeurs $\{\mathbb{P}(\{\omega\}) \mid \omega \in \Omega\}$ et on a
$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1.$$
- Une variable aléatoire discrète X est une fonction de Ω dans un ensemble fini ou dénombrable E et telle que pour tout $x \in E$, $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \in \mathscr{A}$. Son espérance est donnée par
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega).$$
- **Inégalité de Markov** – Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}([|X| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^k)}{\varepsilon^k}.$$

Problème – Estimation d'une moyenne par plan de sondage

Dans ce problème, on note $U = \{u_1, \cdots, u_N\}$ une population de $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ individus. Par exemple, U peut être l'ensemble des $N = 16,7$ millions retraités en France (pour l'année 2021). A chaque individu u_i, $i \in \{1, \cdots, N\}$, est associée une valeur numérique y_i (par exemple le revenu annuel perçut en 2021 par le retraité u_i). La moyenne des valeurs $\{y_i \mid i = 1, \cdots, N\}$ est donnée par
$$\bar{y} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i.$$
Cette valeur n'est la plupart du temps pas accessible en pratique. Dans l'exemple du revenu annuel des retraités, il est difficile voire impossible de croiser les différentes sources de revenu d'un individu donné et donc de connaître l'ensemble des valeurs $\{y_i \mid i = 1, \cdots, N\}$. On doit donc se contenter d'estimer la moyenne en effectuant un sondage auprès de la population. Plus précisément, on choisit aléatoirement un échantillon (ou base de sondage) $S \subset U$ et on estime le revenu moyen $\bar{y}$ sur la base des valeurs y_i fournies par les individus appartenant à la base de sondage S.

De manière plus formelle, l'échantillon S est choisi selon un plan de sondage qui est un espace probabilisé $(\mathscr{P}(U), \mathscr{A}, \mathbb{P})$ où l'univers $\mathscr{P}(U)$ est l'ensemble des parties de U (c'est-à-dire l'ensemble de tous les sous-ensembles de U), $\mathscr{A}$ est l'ensemble des parties de $\mathscr{P}(U)$ et enfin $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $(\mathscr{P}(U), \mathscr{A})$. La probabilité de choisir un échantillon $S \subset U$ donné est donc $\mathbb{P}(\{S\})$.
Important – Il faut bien comprendre que dans un sondage, les valeurs y_i, $i = 1, \cdots, N$ ne sont *pas aléatoires*. L'aléa provient uniquement de choix de l'échantillon par le plan de sondage.

Partie I : Quelques plans de sondage

Exemple 1 On suppose pour commencer que $U = \{u_1, u_2, u_3\}$.

I.1) Donner les 8 éléments de l'ensemble $\mathscr{P}(U)$.

I.2) Donner un élément de $\mathscr{A}$ (celui que vous voulez)

I.3) Quelle est la valeur de la somme

$$\sum_{S \in \mathscr{P}(U)} \mathbb{P}\big(\{S\}\big).$$

On suppose que pour tout $S \in \mathscr{P}(U)$, $\mathbb{P}(\{S\}) = \text{card}(S)/c_3$ où c_3 est une constante strictement positive.

I.4) Donner la valeur de c_3.

On se place à présent dans le cas plus général où $U = \{u_1, \cdots, u_N\}$ avec $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

I.5) Quel est, en fonction de N, le cardinal de $\mathscr{P}(U)$?

On suppose que pour tout $S \in \mathscr{P}(U)$, $\mathbb{P}(\{S\}) = \text{card}(S)/c_N$.

I.6) Donner, en fonction de N, la valeur de c_N où c_N est une constante strictement positive (vous donnerez l'expression la plus simple possible de cette constante).

Exemple 2 – Plan de sondage aléatoire simple (plan SAS) Soit $n \in \{1, \cdots, N\}$. Le plan SAS est l'espace probabilisé $(\mathscr{P}(U), \mathscr{A}, \mathbb{P}_n^{(SAS)})$ où la probabilité $\mathbb{P}_n^{(SAS)}$ est définie pour tout échantillon $S \subset U$ par

$$\mathbb{P}_n^{(SAS)}\big(\{S\}\big) := \begin{cases} 0 & \text{si card}(S) \neq n, \\ p_n & \text{si card}(S) = n. \end{cases}$$

I.7) Donner la valeur de p_1 (pour le cas $n = 1$) ainsi que la valeur de p_N (pour le cas $n = N$) qu'il faut prendre pour que $\mathbb{P}_n^{(SAS)}$ soit bien une mesure de probabilité.

I.8) Donner, en fonction de N et n, la valeur de p_n.

Une méthode pour choisir aléatoirement un échantillon $S \subset U$ selon le plan SAS est décrite dans l'algorithme suivant :

Etape 1 – *On choisit au hasard un individu dans la population U, chaque individu ayant la même probabilité d'être choisi. Cet individu est noté u_1^*.*

Etape 2 – *On choisit au hasard un individu dans la population $U \setminus \{u_1^*\}$, chaque individu ayant la même probabilité d'être choisi. Cet individu est noté u_2^*.*

...

Etape n – *On choisit au hasard un individu dans la population $U \setminus \{u_1^*, \cdots, u_{n-1}^*\}$, chaque individu ayant la même probabilité d'être choisi. Cet individu est noté u_n^*.*

A l'issue de l'étape n, on obtient donc l'échantillon $\{u_1^*, \cdots, u_n^*\}$ de taille n.

I.9) Calculer la probabilité de choisir l'individu u_1 lors de la première étape.

I.10) Calculer la probabilité de choisir l'individu u_1 lors de la première étape et l'individu u_2 lors de la deuxième étape.

I.11) Calculer la probabilité que les individus u_1 et u_2 soient choisis à l'issue de la deuxième étape.

I.12) En déduire que la probabilité que l'échantillon $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ soit choisi par cet algorithme est égale à p_n.

Exemple 3 – Plan de sondage de Bernoulli L'algorithme suivant permet de choisir aléatoirement un échantillon selon le plan de sondage de Bernoulli.

Etape 1 – *On note $x_1, \cdots, x_N$ les réalisations de N variables aléatoires $X_1, \cdots, X_N$ indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.*

Etape 2 – *On construit l'échantillon $S \subset U$ en prenant les individus u_i pour lesquels $x_i = 1$. La taille de l'échantillon ainsi obtenu est évidemment aléatoire.*

I.13) Quelle est la probabilité d'obtenir l'ensemble vide à l'issue de cet algorithme ?

I.14) Pour tout $k \in \{0, \cdots, N\}$, donner l'expression de la probabilité d'obtenir un échantillon de taille k en fonction de N, p et k (justifier votre réponse).

I.15) Pour $k \in \{0, \cdots, N\}$, quelle est la probabilité d'obtenir l'échantillon $\{u_1, \ldots, u_k\}$?

Le plan de sondage de Bernoulli est donc l'espace probabilisé $(\mathscr{P}(U), \mathscr{A}, \mathbb{P}_p^{(Ber)})$ où la probabilité $\mathbb{P}_p^{(Ber)}$ est définie pour tout $S \in \mathscr{P}(U)$ par

$$\mathbb{P}_p^{(Ber)}\big(\{S\}\big) = p^{\mathrm{card}(S)}(1-p)^{N-\mathrm{card}(S)}.$$

On introduit la variable aléatoire Z_p définie sur l'espace probabilisé $(\mathscr{P}(U), \mathscr{A}, \mathbb{P}_p^{(Ber)})$ et telle que pour tout $S \in \mathscr{P}(U)$, $Z_p(S) = \mathrm{card}(S)$.

I.16) Calculer l'espérance de Z_p (vous donnerez le résultat sous sa forme la plus simple possible).

Exemple 4 – Plan de sondage systématique Pour ce plan de sondage, l'échantillon est choisi aléatoirement de la façon suivante : pour un pas d'échantillonnage $a \in \{1, \cdots, N\}$ fixé par l'utilisateur, on choisit aléatoirement avec équiprobabilité un entier r dans l'ensemble $\{1, \cdots, a\}$. On obtient alors l'échantillon

$$\big\{u_r, u_{r+a}, \cdots, u_{r+(n-1)a}\big\} = \big\{u_{r+ja} \mid j \in \{0, \cdots, n-1\}\big\},$$

où $n = \lfloor (N-r)/a \rfloor + 1$, la fonction $\lfloor \cdot \rfloor$ étant la partie entière inférieure.
Afin de se familiariser avec ce plan de sondage, on suppose dans un premier temps que $U = \{u_1, \cdots, u_{10}\}$ et que le pas d'échantillonnage est $a = 3$.

I.17) Donner l'ensemble des échantillons que l'on peut obtenir avec le plan de sondage systématique.

I.18) Quelle est la probabilité d'obtenir l'échantillon $\{u_1, u_5, u_8\}$? Celle d'obtenir l'échantillon $\{u_2, u_5, u_8\}$?

On se place à présent dans le cadre général d'une population U de taille N et d'un plan systématique de pas d'échantillonnage $a \in \{1, \cdots, N\}$.

I.19) Quelle est la probabilité $\mathbb{P}_a^{(Sys)}(\{S\})$ d'obtenir l'échantillon $S \subset U$.

Partie II – Probabilité d'inclusion

On s'intéresse ici au calcul de la probabilité d'inclusion d'un ou plusieurs individus pour un plan de sondage $(\mathscr{P}(U), \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Pour un individu $u_k \in U$ donné, sa probabilité d'inclusion est la probabilité $\pi^{(k)}$ qu'un échantillon S tiré selon le plan de sondage contienne u_k. Autrement dit,

$$\pi^{(k)} := \mathbb{P}\big(\big\{S \in \mathscr{P}(U) \mid u_k \in S\big\}\big).$$

On note $A_k \in \mathscr{A}$ l'événement $\big\{S \in \mathscr{P}(U) \mid u_k \in S\big\}$. On rappelle que $\pi^{(k)} = \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_{A_k})$ où $\mathbb{I}_{A_k}$ est la variable aléatoire définie sur $(\mathscr{P}(U), \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et telle que pour tout $S \in \mathscr{P}(U)$,

$$\mathbb{I}_{A_k}(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \in A_k, \\ 0 & \text{si } S \notin A_k. \end{cases}$$

Pour tout couple $(k, \ell) \in \{1, \cdots, N\}^2$ avec $k \neq \ell$, la probabilité d'inclusion des individus u_k et u_ℓ est donnée par

$$\pi^{(k,\ell)} := \mathbb{P}\big(\big\{S \in \mathscr{P}(U) \mid \{u_k, u_\ell\} \subset S\big\}\big) = \mathbb{P}(A_k \cap A_\ell) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_{A_k \cap A_\ell}).$$

II.1) En utilisant la formule donnant l'espérance d'une variable aléatoire (voir les rappels en début de sujet) donner, pour tout $(k, \ell) \in \{1, \cdots, N\}^2$ avec $k \neq \ell$, les expressions des probabilités $\pi^{(k)}$ et $\pi^{(k,\ell)}$.

II.2) Pour le plan de sondage SAS (exemple 2), donner les expressions de $\pi^{(k)}$ et $\pi^{(k,\ell)}$ en fonction de n et N.

II.3) Pour le plan de sondage de Bernoulli (exemple 3), montrer en utilisant la réponse à la question II.1) que pour tout $k \in \{1, \cdots, N\}$,

$$\pi^{(k)} = \sum_{n=1}^{N} p^n (1-p)^{N-n} \sum_{S \in B_n} \mathbb{I}_{A_k}(S),$$

où $B_n = \{S \in \mathscr{P}(U) \mid \operatorname{card}(S) = n\} \in \mathscr{A}$.

II.4) Donner, en fonction de n et N, l'expression de la somme

$$\sum_{S \in B_n} \mathbb{1}_{A_k}(S),$$

et en déduire l'expression de $\pi^{(k)}$ pour le plan de sondage de Bernoulli.

II.5) En vous inspirant des questions II.3) et II.4), donner l'expression de $\pi^{(k,\ell)}$ pour le plan de sondage de Bernoulli.

II.6) Pour le plan de sondage systématique (exemple 4), donner l'expression de $\pi^{(k)}$ en fonction du pas d'échantillonnage a.

Partie III – Estimation de la moyenne

L'estimation de la moyenne $\bar{y}$ définie dans l'introduction du problème passe par l'estimation de la somme

$$t_N = \sum_{i=1}^{N} y_i.$$

Pour estimer t_N, on dispose uniquement des valeurs y_i pour les individus u_i qui appartiennent à l'échantillon choisi selon le plan de sondage $(\mathscr{P}(U), \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On introduit dans un premier temps la variable aléatoire $\tilde{t}_N$ définie sur l'espace probabilisé $(\mathscr{P}(U), \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telle que pour tout $S \in \mathscr{P}(U)$,

$$\tilde{t}_N(S) = \sum_{u_k \in S} y_k = \sum_{k=1}^{N} y_k \mathbb{1}_{A_k}(S),$$

où $A_k = \left\{S \in \mathscr{P}(U) \mid u_k \in S\right\}$. On suppose dans toute la suite que $\pi^{(k)} = \mathbb{P}(A_k) > 0$ pour tout $k \in \{1, \cdots, N\}$.

III.1) Montrer que

$$\mathbb{E}(\tilde{t}_N) = \sum_{k=1}^{N} \pi^{(k)} y_k$$

III.2) En déduire un estimateur sans biais de la moyenne $\bar{y}$.

III.3) Donner l'expression de la variance de l'estimateur sans biais trouvé à la question précédente.

Exercice – Inégalité de Hoeffding

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On suppose pour cet exercice que

- Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes;
- Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $\mathbb{E}(X_i) = 0$.

- Il existe $-\infty < a < 0 < b < +\infty$ tels que

$$a \leq \inf_{\omega\in\Omega} X(\omega) < \sup_{\omega\in\Omega} X(\omega) \leq b.$$

En posant $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, l'objectif de cet exercice est d'obtenir l'inégalité de Hoeffding donnée pour tout $\varepsilon > 0$ par

$$\mathbb{P}([|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{n(b-a)^2}\right).$$

a) En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [a,b]$,

$$\exp(tx) \leq \frac{b-x}{b-a}\exp(ta) + \frac{x-a}{b-a}\exp(tb)$$

b) En déduire que pour tout $i \in \{1,\cdots,n\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(\exp(tX_i)) \leq \exp\Big(g\big((b-a)t\big)\Big),$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie pour tout $y \in \mathbb{R}$ par

$$g(y) = \frac{a}{b-a}y + \log\left(\frac{b-a\exp(y)}{b-a}\right)$$

c) En utilisant un développement limité, montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$g(y) \leq \frac{y^2}{2}\sup_{y\in\mathbb{R}} g''(y),$$

où g'' est la dérivée seconde de g.

On admettra pour la suite que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} g''(y) \leq \frac{1}{4}.$$

d) Déduire des questions précédentes que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\Big(\exp(tS_n)\Big) \leq \exp\left(\frac{nt^2(b-a)^2}{8}\right).$$

e) En utilisant l'inégalité de Markov (voir les rappels au début du sujet), montrer que pour tout $t > 0$ et $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}([S_n \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbb{E}\Big(\exp(tS_n)\Big)}{\exp(t\varepsilon)}.$$

f) En prenant $t = d\varepsilon/n$ avec $d > 0$, trouver la constante $M_n(a,b,d,\varepsilon)$ telle que

$$\mathbb{P}([S_n \geq \varepsilon]) \leq M_n(a,b,d,\varepsilon).$$

g) Quelle valeur de $d > 0$ (qui dépendra de a et b) faut-il prendre pour obtenir l'inégalité

$$\mathbb{P}([S_n \geq \varepsilon]) \leq \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{n(b-a)^2}\right).$$

h) Expliquer pourquoi on a également l'inégalité

$$\mathbb{P}([S_n \leq -\varepsilon]) \leq \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{n(b-a)^2}\right).$$

i) Déduire l'inégalité de Hoeffding des questions précédentes.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2022

Épreuve de français

Durée : 2h

Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas, c'est-à-dire, le plus grand,* comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé.

Vous placerez une simple barre tous les 10 mots et une double barre tous les 50 mots. Vous indiquerez le total des mots utilisés. Vous écrirez une ligne sur deux pour faciliter la correction.

« Ce que tu soulèves (les enfants ne doivent pas être reconnaissants de leur existence envers leurs parents) n'est pas le point central chez Swift. D'ailleurs, nul ne prétend cela de façon aussi sommaire. L'essentiel est dans la phrase finale : « Les parents sont, parmi tous les êtres humains, les derniers à qui l'on devrait confier l'éducation des enfants ». Il est vrai que cela, tout comme la démonstration conduisant à cette phrase, est formulé d'une façon bien trop dense, et je vais donc chercher à te l'expliquer plus en détail, mais, je te répète que tout ceci n'est que l'opinion de Swift (qui était d'ailleurs père de famille) ; mon opinion va certes aussi dans ce sens, mais je n'ose pas être si catégorique.

Swift, donc pense : « Toute famille ne représente au départ qu'un lien animal, pour ainsi dire un seul organisme, une seule circulation sanguine ». Elle ne peut donc, ne dépendant que d'elle-même, se transcender, ne peut former un nouvel être humain à partir d'elle-même ; si elle s'y essaie à travers l'éducation familiale, il s'agit d'une sorte d'inceste spirituel.

La famille est donc un organisme, mais extrêmement compliqué et déséquilibré, et comme tout organisme, elle aspire elle aussi continûment à l'équilibre. Dans la mesure où cette aspiration à l'équilibre intervient entre parents et enfants (l'équilibre entre les parents n'a pas sa place ici), elle est nommée éducation. Ce pourquoi on l'appelle ainsi est incompréhensible, car il n'y a pas trace d'une véritable éducation, à savoir d'un déploiement tranquille, désintéressé et affectueux des capacités d'un être en devenir, ou ne serait-ce que d'une tolérance calme pour un épanouissement autonome. Il s'agit davantage d'une tentative au déroulement bien souvent crispé d'équilibrer un organisme animal condamné durant de longues années au plus sévère des déséquilibres, organisme que l'on pourra nommer, par contraste avec l'animal humain individuel, « l'animal-famille ».

La raison de l'absolue impossibilité d'un équilibre instantané et juste (et seul un équilibre juste est un véritable équilibre, lui seul est durable) au sein de cet animal-famille est l'inégalité fondamentale entre ses parties, en particulier la monstrueuse supériorité en puissance du couple parental face aux enfants pendant de nombreuses années. En conséquence de quoi, tant que les enfants sont des enfants, les parents s'octroient le droit exclusif de représenter la famille, non seulement vis-à-vis de l'extérieur, mais aussi dans son organisation morale interne, retirant ainsi pas à pas aux enfants leurs droits de la personnalité, pouvant à partir de là les rendre incapables de jamais faire valoir ces droits en bonne et due forme ; un malheur qui, plus tard, ne frappera pas moins les parents que leurs enfants.

La différence essentielle entre éducation véritable et éducation familiale est que la première est une affaire humaine, la seconde une affaire familiale. Au sein de l'humanité, chaque être humain a sa place, ou *a minima* la possibilité de dépérir à sa façon ; dans la famille circonscrite par les parents, seuls certains êtres très particuliers ont leur place, lorsqu'ils répondent à des exigences bien précises et respectent de surcroît des échéances dictées par les parents. S'ils n'y répondent pas, ils ne sont pas rejetés – ce serait très bien, mais c'est impossible, car il s'agit d'un seul organisme –, mais maudits, ou dévorés, ou les deux. Cette dévoration n'a pas lieu physiquement comme dans le vieux modèle parental de mythologie grecque (Cronos qui engloutit ses fils – le plus honnête des pères), mais peut-être Cronos a-t-il privilégié sa méthode par rapport à celle communément en vigueur par pitié pour ses enfants.

L'égoïsme des parents – sentiment parental par excellence – ne reconnaît pas de limites. Le plus grand amour des parents est en matière d'éducation plus égoïste que le plus petit amour d'un éducateur appointé. Ce n'est pas possible autrement. Car les parents ne sont pas libres vis-à-vis de leurs enfants, comme l'est d'ordinaire un adulte face à un enfant, il s'agit de son propre sang et, lourde complication, du sang de chacun d'eux. Quand le père (et l'équivalent est vrai pour la mère) « éduque », il rencontre chez l'enfant des choses qu'il a déjà détestées en lui-même et n'a pas su surmonter et que, certainement, il espère désormais surmonter, car le faible enfant paraît plus en son pouvoir que lui-même. Et c'est ainsi qu'il plonge à pleines mains et avec une brutalité aveugle dans l'être en devenir, sans attendre son développement, ou alors il reconnaît par exemple avec effroi qu'un trait qui lui est propre et qu'il considère comme un signe distinctif, et qui donc (donc!) ne peut pas manquer dans la famille (la famille!), manque chez l'enfant, et il commence à le lui faire entrer dans le crâne à coups de marteau, ce qu'il réussit, mais qu'il rate en même temps, car ce faisant il démolit l'enfant; ou alors il trouve chez l'enfant des choses qu'il a aimées chez son épouse, mais qu'il déteste chez l'enfant (qu'il ne cesse de confondre avec lui-même, tous les parents font ça), comme on peut aimer beaucoup les yeux bleus azur de sa femme, mais être saisi d'un profond dégoût si l'on se retrouve soudain avec de pareils yeux, ou bien il trouve par exemple chez l'enfant des choses qu'il aime en lui ou auxquelles il aspire ou considère comme essentielles à la famille, et tout le reste lui indiffère alors chez l'enfant, il ne voit chez celui-ci que l'être aimé, il s'accroche à l'être aimé, il se rabaisse et devient son esclave, il le dévore par amour.

Voilà, enfantées par l'égoïsme, les deux méthodes éducatives des parents : tyrannie et esclavage à divers degrés, la tyrannie pouvant se manifester de façon très tendre (« tu dois me croire, je suis ta mère! ») et l'esclavage de façon très fière (« Tu es mon fils, c'est pourquoi je vais faire de toi mon sauveur! »), mais ce sont deux méthodes éducatives, bonnes à écrabouiller l'enfant à coups de talon pour le faire entrer dans le sol dont il est issu. Les parents n'ont pour les enfants qu'un amour animal, insensé, se confondant toujours avec eux, tandis que l'éducateur a pour l'enfant de l'attention, ce qui est sans commune mesure en termes d'éducation, même si elle devait être dépourvue d'amour. Je le répète : en termes d'éducation, quand je qualifie l'amour parental d'animal et d'insensé, ce n'est pas en soi une dépréciation, il n'en reste pas moins un mystère insondable au même titre que l'amour créateur et sensé de l'éducateur, mais en revanche, dans une perspective éducative, cette dépréciation ne saurait être trop forte ».

Franz Kafka, « Comment ne pas éduquer les enfants – Lettres sur la famille et autre monstruosité »

Lettre à sa sœur Elli, datée d'automne 1921.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2022

Épreuve d'anglais

Durée : 2h

L'épreuve est constituée de deux parties : un résumé et une traduction. Vous rédigerez ces deux parties sur **deux copies séparées**, sur lesquelles vous indiquerez respectivement « Anglais / résumé » et « Anglais / traduction ».

1 Summarize this text in English in 220 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

Omicron is dealing a big blow to China's economy
For a timely take, analysts are turning to unconventional indicators
The Economist, Apr 4th 2022

Omicron moves fast. That makes it difficult to contain—even for China, which tries to stomp promptly on any outbreak. A cluster of infections in Shanghai, for example, has shattered the city's reputation for deft handling of the pandemic, forcing the government to impose a staggered lockdown, of uncertain duration, for which it seems surprisingly ill prepared.

The variant's speed also means that China's economic prospects are unusually hard to track. A lot can happen in the time between a data point's release and its reference period. The most recent hard numbers on China's economy refer to the two months of January and February. Those (surprisingly good) figures already look dated, even quaint. For much of that period, there was no war in Europe. And new covid-19 cases in mainland China averaged fewer than 200 per day, compared with the 13,267 infections reported on April 4th. Relying on these official economic figures is like using a rear-view mirror to steer through a chicane.

For a more timely take on China's fast-deteriorating economy, some analysts are turning to less conventional indicators. For example, Baidu, a popular search engine and mapping tool, provides a daily mobility index, based on tracking the movement of smartphones. Over the seven days to April 3rd, this index was more than 48% below its level a year ago.

The Baidu index is best suited to tracking movement between cities, says Ting Lu of Nomura, a bank. To gauge the hustle and bustle within cities, he uses other indicators, such as subway trips. Over the week ending April 2nd, the number of metro journeys in eight big Chinese cities was nearly 34% below its level from a year ago. In locked-down Shanghai, where many subway lines are now closed, the number of trips was down by nearly 93%, a worse drop than the city suffered in early 2020.

The two numbers that worry Mr Lu the most track the economy's distribution system, specifically couriers and lorries. In the week ending April 1st, an index of express deliveries by courier companies was nearly 27% below its level at a similar point last year. Over the same period, an index of road freight compiled by Wind, a data provider, shows a fall of 12.8%. The decline looks especially stark because this indicator was increasing by more than 7% at the end of last year.

Unconventional indicators are all the more valuable in China because of doubts about the official data. The strong figures for January and February, for example, are not only old but odd. They suggest that investment in "fixed" assets, like infrastructure, manufacturing facilities and property, grew by 12.2% in nominal terms, compared with a year earlier. But that is hard to square with double-digit declines in the output of steel and cement. The recovery in property investment also looks peculiar alongside the fall in housing sales, starts and land purchases. When local governments in the provinces of Shanxi, Guizhou and Inner Mongolia said that they were double-checking their figures at the behest of the National Bureau of Statistics (NBS) it became clear that the official statistics look odd even to the official statisticians.

China's high-frequency indicators proved their worth in the spring of 2020, during the fog of the early pandemic. Although everyone knew the economy would suffer, forecasters were at first timid in cutting their growth forecasts. No one knew exactly how the economy would react or what the NBS would be prepared to report. With the accumulation of evidence from high-frequency data, forecasters were eventually brave enough to predict negative growth for the first quarter of 2020. Indeed, GDP shrank by 6.8%, according to even the official figures.

The timeliness of these indicators makes them valuable in periods of flux. But they must still be interpreted with care. “There are many traps in those numbers,” says Mr Lu. Any short period of seven days can be distorted by idiosyncratic events, such as bad weather or holidays. And annual growth rates can be skewed by similar idiosyncrasies a year ago. Moreover, many of these indicators have a history of only a couple of years. Interpreting them is therefore more art than science. What does a dramatic weekly decline in road freight mean for quarterly GDP growth? It is impossible to say with any precision. Mr Lu was heavily trained in econometrics when he was a PhD student at the University of California, Berkeley. “But with only one or two years of data, if I used the kind of techniques I learned at school, people would laugh at me.”

To help avoid some of the traps lurking in these unconventional indicators, Mr Lu and his team watch “a bunch of numbers, instead of just one”. In a recent report he highlighted 20 indicators, ranging from asphalt production to movie-ticket sales. “If seven or eight out of ten indicators are worsening, then we can be confident that GDP growth is getting worse,” he says. Right now, he thinks, the direction is clear. “Something must be going very wrong.”

2 Translate the following text into French

How one oligarch used shell companies and Wall Street ties to invest in the U.S.
The New York Times, March 21, 2022

Using a network of banks, law firms and advisers in multiple countries, Roman Abramovich invested billions in American hedge funds.

In July 2012, a shell company registered in the British Virgin Islands wired $20 million to an investment vehicle in the Cayman Islands that was controlled by a large American hedge fund firm.

The wire transfer was the culmination of months of work by a small army of handlers and enablers in the United States, Europe and the Caribbean. It was a stealth operation intended, at least in part, to mask the source of the funds: Roman Abramovich.

For two decades, the Russian oligarch has relied on this circuitous investment strategy — deploying a string of shell companies, routing money through a small Austrian bank and tapping the connections of leading Wall Street firms — to quietly place billions of dollars with prominent U.S. hedge funds and private equity firms, according to people with knowledge of the transactions.

The key was that every lawyer, corporate director, hedge fund manager and investment adviser involved in the process could honestly say he or she wasn’t working directly for Mr. Abramovich. In some cases, participants weren’t even aware of whose money they were helping to manage.

Wealthy foreign investors like Mr. Abramovich have long been able to move money into American funds using such secretive, roundabout setups, taking advantage of a lightly regulated investment industry and Wall Street’s willingness to ask few questions about the origins of the money.

Now, as the United States and other countries impose sanctions on those close to President Vladimir V. Putin of Russia, hunting down these fortunes could pose significant challenges.