Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2023

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

L'épreuve est constituée de deux exercices indépendants.

Exercice 1. Une inégalité entre sommes de séries

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites réelles (indexées par $\mathbb{N}^*$) à termes strictement positifs telles que la série $\sum a_n$ converge. On pose, pour tout élément $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathscr{E}$ et pour tout entier n non nul,

$$h_n = \frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}.$$

L'objet de l'exercice est de prouver la convergence de la série $\sum h_n$ et de comparer sa somme à celle de la série $\sum a_n$.

1. `Un premier exemple`

   On pose, dans cette question, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

   (a) Montrer que la série $\sum a_n$ converge et déterminer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

   (b) i. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de h_n.

   ii. Établir la convergence de la série $\sum h_n$ et déterminer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_n$.

2. `Un second exemple`

   Soit q un réel de $]0,1[$. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = q^{n-1}$.

   (a) Indiquer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et pour tout entier naturel n non nul, la valeur de h_n.

   (b) Établir la convergence de la série $\sum h_n$ et prouver la majoration : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leqslant \frac{1}{(1-q)^2}$.

3. Soit n un entier non nul et soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux n-uplets de nombres réels.

   (a) Prouver l'égalité : $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 + \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(x_i y_j - x_j y_i\right)^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)$.

   (b) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\ \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}$.

4. Prouver, pour tout entier naturel k non nul, l'inégalité : $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{2k^2}$.

   On s'intéressera à la monotonie de la suite de terme général $u_k = \dfrac{1}{2k^2} - \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)^2}$.

5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un élément de $\mathscr{E}$.

   (a) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :
   $$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right).$$

   (b) En déduire, pour tout entier naturel p non nul, l'inégalité :
   $$\sum_{n=1}^{p} h_n \leqslant 4 \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k\right).$$

   (c) Prouver, pour tout entier naturel p non nul, l'inégalité : $\sum\limits_{n=1}^{p} h_n \leqslant 2 \sum\limits_{k=1}^{p} a_k$.

   (d) En déduire la convergence de la série $\sum h_n$ et l'inégalité : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n \leqslant 2 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

6. Soit C un réel strictement positif tel que, pour tout élément $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathscr{E}$, on a
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leqslant C \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

   On va montrer que C est au moins égal à 2.

   On pose, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement supérieur à 1 et on rappelle qu'on dispose de l'égalité : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

   (a) Prouver l'inégalité : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{(n+1)^{\alpha+1}} \geqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{\pi^2}{6}$.

   (b) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité : $h_n \geqslant (\alpha+1)\,\dfrac{n}{(n+1)^{\alpha+1}}$.

   (c) Prouver l'égalité : $\lim\limits_{\substack{\alpha \to 1 \\ >}} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = +\infty$.

(d) Conclure que $C \geqslant 2$.

7. On suppose qu'il existe un réel $K > 0$ tel que, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à termes réels strictement positifs dont la série $\sum a_n$ converge, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \leqslant K \sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n$.

   (a) Justifier l'inégalité : $K \geqslant 1$.
   On pourra utiliser le résultat de la question 2.

   (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $g_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$g_n = \begin{cases} \dfrac{4}{2^n} & \text{si } \exists\, p \in [\![1, N]\!] \quad n = p^2 \\ \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad a_n = \frac{(g_n)^n}{(g_{n-1})^{n-1}}.$$

   i. Calculer a_n pour $n > N^2 + 1$ et en déduire la convergence de la série $\sum a_n$.

   ii. Prouver les inégalités : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n \leqslant 4 \quad$ et $\quad \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \geqslant 2N$.

   (c) Établir l'égalité : $(g_n)^n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$.

   (d) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $h_n \leqslant g_n$ et en déduire qu'un tel réel K n'existe pas.

Exercice 2. Premier numéro manquant

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ avec $1 \leqslant n < N$ et $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une famille de variables aléatoires **indépendantes** toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ et toutes de loi uniforme sur l'intervalle entier $[\![1, N]\!]$. On note, pour tout entier naturel n non nul, T l'application qui, à chaque $\omega \in \Omega$, associe

$$T(\omega) = \min\{k \in [\![1, N]\!] \,;\, \forall\, i \in [\![1, n]\!] \quad X_i(\omega) \neq k\}.$$

Si on se représente l'expérience aléatoire consistant à tirer n fois successivement, avec remise, une boule dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, la valeur $T(\omega)$ serait le numéro aléatoire du plus petit numéro qui ***n'est pas*** *apparu dans la liste ω des numéros tirés au cours de la succession de ces n tirages.*

Partie A : Deux cas particuliers

Soit N un entier au moins égal à 4 et X, Y et Z trois variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$, **indépendantes** et toutes trois de loi uniforme sur l'intervalle entier $[\![1, N]\!]$. On note U et V les applications qui, à chaque $\omega \in \Omega$, associent

$$U(\omega) = \min\Big\{k \in [\![1, N]\!] \,;\, X(\omega) \neq k \text{ et } Y(\omega) \neq k\Big\}.$$

et

$$V(\omega) = \min\Big\{k \in [\![1, N]\!] \,;\, X(\omega) \neq k, Y(\omega) \neq k \text{ et } Z(\omega) \neq k\Big\}.$$

1. (a) Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire U ?

(b) Déterminer la loi de la variable aléatoire U.

(c) Calculer l'espérance de U.

2. (a) Calculer $\mathbf{P}(V=1)$ et $\mathbf{P}(V=4)$.

   (b) Établir l'égalité : $\mathbf{P}(V=3) = \dfrac{6N-12}{N^3}\cdot$

   (c) En déduire que l'espérance de V vaut $\left(1+\dfrac{1}{N}\right)^3\cdot$

Partie B : Des égalités

On note Δ l'application qui, à tout polynôme réel $P(X)$, associe le polynôme

$$\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

On observera que l'application Δ est linéaire.

On note, pour tout entier naturel k non nul, Δ^k l'application $\underbrace{\Delta\circ\Delta\circ\ldots\circ\Delta}_{k \text{ fois } \Delta}$ et on pose $\Delta^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}[X]}$.

1. Soit $(j,n)\in\mathbb{N}^2$ avec $j\leqslant n$. Établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j} = \binom{n+1}{j+1}$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $P := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

   Prouver, pour tout entier naturel m, l'égalité :

$$\Delta^m(P)(X) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}P(X+j).$$

   On pourra procéder par récurrence sur l'entier m.

3. (a) Soit $q\in\mathbb{N}$ et $Q(X)\in\mathbb{R}[X]$ de degré q.
   Quel est, pour tout entier $r\in[\![0,q]\!]$, le degré de $\Delta^r(Q)(X)$?

   (b) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $Q = X^n$. Que vaut $\Delta^n(Q)(X)$?

4. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $P := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme réel de degré n.

   (a) Déduire des questions précédentes l'égalité :

$$a_n\, n! = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}P(X+j).$$

   (b) En déduire l'égalité :

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\binom{n}{j}\left(1-\frac{j}{N}\right)^n = \frac{n!}{N^n}\cdot$$

   On utilisera le résultat précédent pour un polynôme P bien choisi.

5. Soit $(n,N) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

   (a) Établir, pour tout entier $m \geqslant n+1$, l'égalité :

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} \left(1 - \frac{j}{N}\right)^n = 0.$$

   (b) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \binom{n+1}{j} \left(1 - \frac{j}{N}\right)^n$.

Partie C : Le cas général

On reprend maintenant les notations du préambule.

Soit $(N,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant n < N$.

1. (a) Déterminer la valeur de $\mathbf{P}(T=1)$.

   (b) Déterminer la valeur de $\mathbf{P}(T=n+1)$.

   (c) Établir l'égalité

$$\mathbf{P}(T=2) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{N}\right)^i \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-i} \quad \text{puis l'égalité} \quad \mathbf{P}(T=2) = \left(1-\frac{1}{N}\right)^n - \left(1-\frac{2}{N}\right)^n.$$

   (d) Établir l'égalité : $\mathbf{P}(T=3) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n - 2\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n + \left(1 - \frac{3}{N}\right)^n$.

2. *On admet que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ alors on dispose de la formule du crible suivante :*

$$\boldsymbol{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leqslant n} \boldsymbol{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_j}).$$

   On pose, pour tout entier $p \in [\![1,n]\!]$, $A_p = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \neq p]$.

   (a) Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Que vaut la probabilité de l'intersection de j événements distincts pris parmi $A_1, A_2, \ldots, A_n$?

   (b) On note E^c le complémentaire d'un événement E. Justifier, pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, l'égalité : $[T > k] = \left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c$.

   (c) Obtenir, pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, une expression de $\mathbf{P}(T > k)$ faisant intervenir un symbole de sommation.

3. (a) Soit $k \in [\![1,n+1]\!]$. Établir l'égalité : $\mathbf{P}(T=k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k-1}{i-1} \left(1 - \frac{i}{N}\right)^n$.

   (b) Retrouver, à l'aide du résultat précédent, les valeurs trouvées en fin de **partie A** pour les sommes

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \left(1 - \frac{j+1}{N}\right)^n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \binom{n+1}{i} \left(1 - \frac{i}{N}\right)^n.$$

4. `Calcul de l'espérance de` T

   Soit $(N, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant n < N$.

   (a) Établir, pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, l'égalité :

   $$\mathbf{P}(T > k) = \left(\frac{N+1}{N}\right)^n \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{N+1-j}{N+1}\right)^n.$$

   (b) En utilisant le résultat de la question **B**-5-b) (avec $N \leftarrow N+1$) conclure à l'égalité :

   $$\mathbf{E}(T) = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^n.$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2023

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Le problème porte sur une famille de polynômes orthogonaux, appelés polynômes de Hermite, qui interviennent dans de nombreuses applications, en physique, en théorie du signal et en probabilité, par exemple.

L'énoncé est divisé en trois parties, largement indépendantes, que les candidats ne sont pas tenus de traiter dans l'ordre.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

On note $\mathscr{L}_2$ l'ensemble des applications u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$ converge.

On note $\mathscr{R}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qu'on peut confondre avec les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ pour en définir les coefficients et le degré (égal à $-\infty$ pour la fonction nulle).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{R}_n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à n.

Partie 1 Étude et développements en séries d'une fonction de deux variables

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \mathrm{e}^{2xy - x^2} .$$

1. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et que son seul point critique est l'origine $(0,0)$. La fonction f admet-elle un extremum local en ce point ?

2. On note K l'ensemble des éléments (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $\dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$.

   a) Justifier que f admet un maximum et un minimum sur K.

   b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

   Justifier qu'il existe un réel t tel que, pour cette valeur de t, $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ et :

   $$2xy - x^2 = 2\sqrt{2}\,\sin(2t - \frac{\pi}{4}) - 2 .$$

   c) En déduire le maximum et le minimum de f sur K, puis les points de K où ils sont atteints.

3. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \longmapsto f(x,y)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et en donner le développement en série entière.

4. On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, définie par

   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad w(x) = \mathrm{e}^{-x^2} .$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2}\, w^{(n)}(x)$$

   où $w^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de w.
   En particulier : $H_0(x) = 1$.

   a) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$.

b) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x).$$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n et trouver son coefficient dominant.

5. a) Compléter l'avant-dernière ligne du code Python suivant (en substituant une expression convenable aux trois points d'interrogation) pour que la fonction "coefH" calcule les coefficients du polynôme P_n pour la valeur de n entrée en paramètre.

```
def coefH(n):
    coeff=numpy.zeros((n+1,n+1))
    coeff[0,0]=1
    coeff[1,1]=2
    for k in range(1,n):
        coeff[k+1,0]=-coeff[k,1]
        coeff[k+1,k+1]=2**(k+1)
        for i in range(1,k+1):
            coeff[k+1,i]=2*coeff[k,i-1]- ??? # ligne à modifier
    return coeff[n,:]

coefH(4)  # exemple: les coefficients de H4, égal à 16 X^4 - 48 X^2 + 12
Out: array([ 12.,  -0., -48.,   0.,  16.])
```

b) Qu'obtiendrait-on pour "coefH(5)" après avoir modifié le code de la fonction "coefH" en insérant avant sa dernière ligne ("return coeff[n, :]") l'instruction suivante ?

```
print(coeff)
```

6. a) Justifier que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(x, y)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, établir l'égalité : $\quad f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(y)}{n!} x^n$.

Partie 2 Un produit scalaire sur $\mathscr{L}_2$

1. a) Justifier que, pour tout $(u, v) \in {\mathscr{L}_2}^2$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,v(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ converge.

On note $(.|.)$ l'application de ${\mathscr{L}_2}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\,(u, v) \in {\mathscr{L}_2}^2, \quad (u|v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,v(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\,.$$

b) Justifier que $\mathscr{L}_2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que l'application $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{L}_2$.

On note $\|.\|$ la norme sur $\mathscr{L}_2$ associée au produit scalaire $(.|.)$, définie par :

$$\forall\, u \in \mathscr{L}_2, \quad \|u\| = \sqrt{(u|u)}\,.$$

2. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathscr{L}_2$ et $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions impaires de $\mathscr{L}_2$.

   a) Justifier l'égalité :
$$\mathscr{L}_2 = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I} \quad . \tag{1}$$

   b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}_n = \mathscr{P} \cap \mathscr{R}_n$ et $\mathscr{I}_n = \mathscr{I} \cap \mathscr{R}_n$.

   Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dimension de $\mathscr{P}_n$ et la dimension de $\mathscr{I}_n$ (on distinguera le cas où n est pair du cas où n est impair).

   c) Pour tout $u \in \mathscr{I}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\min\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x) - P(x)\big)^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \,;\, P \in \mathscr{P}_n\right\}$.

3. On note $\mathscr{K}$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{L}_2$ qui sont nulles hors d'un segment inclus dans l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$:
$$\mathscr{K} = \{v \in \mathscr{L}_2 \,;\, \exists\, \alpha > 0, \exists\, A > \alpha,\ \forall\, x \notin [\alpha, A],\ v(x) = 0\} \,.$$

   Soit u une fonction bornée appartenant à $\mathscr{L}_2$ et ε un nombre réel strictement positif.

   a) Pour tout entier n strictement supérieur à 1, on pose :
$$v_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ (nx-1)\, u(\dfrac{2}{n}) & \text{si } \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n} \\ u(x) & \text{si } \frac{2}{n} < x < n - \frac{1}{n} \\ n(n-x)\, u(n - \dfrac{1}{n}) & \text{si } n - \frac{1}{n} \le x \le n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases} \,.$$

   Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(u(x) - v_n(x)\big)^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
   On pourra utiliser le théorème de convergence dominée.

   b) Justifier l'existence d'un élément v de $\mathscr{K}$ tel que :
$$\int_0^{+\infty} \big(u(x) - v(x)\big)^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \le \varepsilon \,.$$

   c) Justifier que si la fonction u est paire, alors il existe un élément v de $\mathscr{K}$ tel que :
$$\|u - v_p\|^2 \le 2\,\varepsilon \quad \text{où} \quad v_p(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \ge 0 \\ v(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \,.$$

   On démontre de même, et on pourra l'admettre, que si la fonction u est impaire, alors il existe un élément v de $\mathscr{K}$ tel que :
$$\|u - v_i\|^2 \le 2\,\varepsilon \quad \text{où} \quad v_i(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \ge 0 \\ -v(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \,.$$

Partie 3 Un endomorphisme autoadjoint de $\mathscr{R}$

On note g et h les endomorphismes de $\mathscr{R}$ définis par :

$$\forall P \in \mathscr{R}, \quad \begin{cases} g(P) = -P'' + 2XP' + P \\ h(P) = 2XP - P' \end{cases} .$$

Ainsi, par exemple, pour tout $P \in \mathscr{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $\big(h(P)\big)(x) = 2xP(x) - P'(x)$.

1. a) Établir l'égalité : $g \circ h - h \circ g = 2h$.

   b) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P \in \mathscr{R}$, si $g(P) = \lambda P$, alors

$$g\big(h(P)\big) = (\lambda + 2)\, h(P) \quad (*)$$

2. Établir, pour tout $(P, Q) \in \mathscr{R}^2$:

$$(P'|Q') = (g(P)|Q) - (P|Q) .$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   a) Montrer : $\forall P \in \mathscr{R}_n, \quad g(P) \in \mathscr{R}_n$.

   b) On note g_n l'endomorphisme de $\mathscr{R}_n$ défini par :

$$\forall P \in \mathscr{R}_n, \quad g_n(P) = g(P).$$

   Montrer que g_n est un endomorphisme autoadjoint de $\mathscr{R}_n$, pour le produit scalaire $(.|.)$.

4. Les polynômes H_n utilisés dans la suite sont ceux de la partie 1.

   a) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $h(H_k)$, et en déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(H_k) = (2k+1) H_k .$$

   b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(H_0, \ldots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathscr{R}_n$.

   c) En déduire, pour tout $u \in \mathscr{L}_2$, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{(u|H_n)^2}{\| H_n \|^2}$ et l'inégalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(u|H_n)^2}{\| H_n \|^2} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \quad . \tag{2}$$

5. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note e_p la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-px}$.

   a) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x > 0$, les inégalités :

$$|\mathrm{e}^{-2x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \mathrm{e}^{-x}| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^{-x} \leq \frac{(n+1)^n}{n!} \mathrm{e}^{-n-1} .$$

   b) En déduire une suite de polynômes $(Q_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite des fonctions $x \longmapsto Q_{2,n}(x)\mathrm{e}^{-x}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction e_2.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier p supérieur ou égal à 2, il existe une suite de polynômes $(Q_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite des fonctions $x \longmapsto Q_{p,n}(x)\mathrm{e}^{-x}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction e_p.

On pourra utiliser les fonctions polynomiales $x \longmapsto Q_{p,n}(\dfrac{x}{2})\Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(p+1)^k}{k!\,2^k}\, x^k\Big)$.

d) En déduire que, pour toute fonction polynomiale P, il existe une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{R}$ telle que la suite des fonctions $x \longmapsto Q_n(x)\mathrm{e}^{-x}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $x \longmapsto P(\mathrm{e}^{-x})$.

6. Soit v une fonction appartenant à l'ensemble $\mathscr{K}$ défini dans la partie 2.

a) En utilisant le théorème de Weierstrass et le changement de variable $x = -\ln(t)$, justifier, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un polynôme P tel que :

$$\forall\, x \geq 0,\ |v(x) - P(\mathrm{e}^{-x})| \leq \varepsilon\,.$$

b) En déduire qu'il existe une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes (éléments de $\mathscr{R}$) telle que la suite des fonctions $x \longmapsto Q_n(x)\mathrm{e}^{-x}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction v.

c) On note w la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$w(x) = \begin{cases} v(\dfrac{x^2}{4})\,\mathrm{e}^{x^2/4} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\begin{cases} w_p(x) = w(x) + w(-x) \\ w_i(x) = w(x) - w(-x) \end{cases}.$$

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, justifier l'existence de deux polynômes Q et R vérifiant les inégalités

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(w_p(x) - Q(\frac{x^2}{4})\big)^2 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(w_i(x) - x\,R(\frac{x^2}{4})\big)^2 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x \end{cases}.$$

Pour parvenir à la seconde inégalité, on pourra, en lieu et place de v*, utiliser la fonction*

$$t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{w(2\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

d) Soit $\eta > 0$.

Déduire des résultats précédents que :

- pour toute fonction paire w_p telle que la fonction

$$x \longmapsto \begin{cases} w_p(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient à $\mathscr{K}$, il existe un polynôme pair P_p tel que

$$\| w_p - P_p \| \leq \eta$$

- pour toute fonction impaire w_i telle que la fonction

$$x \longmapsto \begin{cases} w_i(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient à $\mathscr{K}$, il existe un polynôme impair P_i tel que

$$\| w_i - P_i \| \leq \eta \,.$$

7. Soit u une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

a) En s'appuyant sur les derniers résultats de la partie 2 et sur ce qui précède, démontrer qu'il existe une suite d'éléments de $\mathscr{R}$ qui converge vers u pour la norme $\|.\|$.

b) Justifier l'égalité :

$$\lim_{n \to +\infty} \| u - \sum_{k=0}^{n} \frac{(u|H_k)}{\| H_k \|^2} H_k \| = 0 \,.$$

c) Justifier que l'inégalité (2) démontrée en question 4 est en fait une égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(u|H_n)^2}{\| H_n \|^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \quad . \tag{3}$$

d) Ces propriétés restent-elles vraies si u appartient à $\mathscr{L}_2$ sans être bornée ?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2023

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h

Le sujet comporte un problème et un exercice qui peuvent être traités indépendamment. La notation tiendra largement compte de la clarté et de la précision des réponses.

Quelques notations et rappels

Les notations et rappels ci-dessous vous seront utiles pour la résolution du problème et de l'exercice. Pensez à vous y référer.

- Toutes les variables aléatoires considérées dans ce sujet seront définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- Soient $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{A}$. On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \le \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i).$$

- Soit E un ensemble quelconque. Pour tout $A \subset E$ et $B \subset E$, on note

$$A \setminus B := \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

- **[Formule des espérances totales]** Soient Y et N deux variables aléatoires. Si la variable aléatoire N est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et si Y est intégrable (i.e., $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$) alors

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}([N=k])\mathbb{E}(Y \mid N=k).$$

- La somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres $\lambda_1 > 0, \cdots, \lambda_n > 0$ suit également une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.
- **[Théorème des valeurs intermédiaires]** Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout x tel que $\min(g(a), g(b)) \le x \le \max(g(a), g(b))$, il existe au moins un point $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = x$.
- Une fonction φ définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est strictement convexe si pour tout $x \neq y \in I$ et $\lambda \in]0,1[$, on a $\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$.
- Le développement en série entière de l'exponentielle est donné pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\mathrm{e}^x = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{x^i}{i!}.$$

Problème – Processus de Galton-Watson

On souhaite dans ce problème modéliser l'évolution de la taille d'une population de bactéries. On adopte pour se faire le modèle suivant.

- ↪ La population initiale (génération 0) est composée d'une seule bactérie.
- ↪ Cette bactérie va engendrer un nombre aléatoire de nouvelles bactéries. Ce nombre est modélisé par une variable aléatoire $X_{1,0}$ à valeurs dans l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$. La taille de la population de la génération 1 est donc $Z_1 := X_{1,0}$.
- ↪ Les Z_1 bactéries de la première génération vont à leur tour engendrer de nouvelles bactéries. Pour $i = 1, \cdots, Z_1$, on notera $X_{i,1}$ la variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{N}$) modélisant le nombre de descendants de la i-ème bactérie. Ainsi, la taille de la population de la génération 2 est $Z_2 = 0$ si $Z_1 = 0$ et

$$Z_2 := \sum_{i=1}^{Z_1} X_{i,1} \text{ si } Z_1 > 0.$$

- ↪ De manière plus générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera Z_n la variable aléatoire correspondant au nombre d'individus de la génération n. On a donc $Z_0 = 1$ et

$$Z_n := \begin{cases} 0 & \text{si } Z_{n-1} = 0, \\ \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{i,n-1} & \text{si } Z_{n-1} > 0, \end{cases} \tag{1}$$

  où pour tout $i = 1, \cdots, Z_{n-1}$, la variable aléatoire $X_{i,n-1}$ est le nombre de descendants de la i-ème bactérie de la génération $n-1$.
- ↪ On supposera pour finir que les variables aléatoires $\{X_{i,n};\ i \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N}\}$ sont indépendantes et de même loi qu'une variable aléatoire intégrable X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. La loi de X est déterminée par les valeurs $\{p_k := \mathbb{P}([X = k]);\ k \in \mathbb{N}\}$ et on a donc

$$\mu := \mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k p_k < \infty.$$

Le processus $\{Z_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ ainsi construit est connu sous le nom de *processus de Galton-Watson*. L'objectif de ce problème est d'étudier la probabilité d'extinction

$$\overline{\pi} := \mathbb{P}([\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } Z_n = 0]),$$

de la population de bactéries.

Nous allons dans un premier temps calculer la probabilité d'extinction dans des cas simples.

1) Quelle est la valeur de $\overline{\pi}$ lorsque $p_0 = \mathbb{P}([X = 0]) = 0$? Même question lorsque $p_0 = 1$.

Dans toute la suite de ce problème, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera π_n la probabilité que la population soit éteinte à la génération n. On a donc $\pi_n = \mathbb{P}([Z_n = 0])$.

2) Montrer que $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et en déduire qu'elle converge vers une limite finie.
3) On introduit les événements $B_1 = [Z_1 = 0]$ et $\{B_i := [Z_i = 0] \setminus [Z_{i-1} = 0];\ i \geq 2\}$. Montrer que pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
$$\pi_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i).$$
4) En déduire que $\overline{\pi} = \lim \pi_n$ lorsque $n \to \infty$.
5) Pour cette question, on suppose que $p_0 + p_1 = 1$ avec $p_0 \in]0,1[$.
   5.1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire Z_n prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0,1\}$.
   5.2) Donner, en fonction de n et p_1, la valeur de π_n.
   5.3) En déduire la valeur de $\overline{\pi}$.

Pour déterminer la probabilité d'extinction, on doit étudier la *fonction génératrice des probabilités* de la variable aléatoire X modélisant le nombre de descendants d'une bactérie. Cette fonction est définie pour tout $s \in [0,1]$ par $G_X(s) := \mathbb{E}(s^X)$.

6) Donner, en fonction des probabilités $\{p_k;\ k \in \mathbb{N}\}$, les expressions de la suite positive $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et des fonctions positives f_k telles que pour tout $s \in [0,1]$,
$$G_X(s) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k f_k(s).$$
7) Montrer que la série ci-dessus est absolument convergente.
8) Dans le cas particulier où X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, donner l'expression de $G_X(s)$ (vous devrez expliciter les calculs faits pour trouver cette expression).
9) Donner l'expression de $G_X(0)$ en fonction des $\{p_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ (on utilisera la convention $0^0 = 1$). Quelle est la valeur de $G_X(1)$?

On admettra que la fonction G_X est indéfiniment dérivable sur $]0,1[$. Pour tout $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la dérivée d'ordre j est donnée par
$$G_X^{(j)}(s) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k f_k^{(j)}(s),\ s \in]0,1[.$$

On admettra enfin que les fonctions G_X et $G_X^{(1)}$ sont continues à droite en 0 et à gauche en 1.

10) Que représente la valeur $G_X^{(1)}(1)$?

11) Que faut-il imposer sur la valeur de p_0 pour assurer que G_X est strictement croissante sur $]0,1[$?

12) Montrer que si $p_0 + p_1 < 1$ alors G_X est strictement convexe.

On souhaite à présent trouver l'expression de la fonction génératrice des probabilités G_{Z_n} de la variable aléatoire Z_n définie par l'équation 1. Remarquons tout d'abord que puisque $Z_1 = X_{1,0}$, la variable aléatoire Z_1 a même loi que X et donc $G_{Z_1}(s) = G_X(s)$ pour tout $s \in [0,1]$.

13) Montrer que pour tout $n \geq 2$, la variable aléatoire Z_{n-1} est indépendante des variables aléatoires $\{X_{i,n-1};\ i \geq 1\}$.

14) En utilisant la question précédente ainsi que la formule des espérances totales, montrer que pour tout $n \geq 1$ et $s \in [0,1]$ on a $G_{Z_n}(s) = G_{Z_{n-1}}(G_X(s))$.

15) Montrer par récurrence que pour $n \geq 1$ et $s \in [0,1]$ on a $G_{Z_n}(s) = G_X(G_{Z_{n-1}}(s))$. En déduire que $\pi_n = G_X(\pi_{n-1})$.

16) En utilisant la question 4), montrer que $\overline{\pi} = G_X\left(\overline{\pi}\right)$.

On s'intéresse à présent à l'équation

$$G_X(s) = s,\ s \in [0,1]. \tag{2}$$

17) Donner une solution évidente de l'équation (2).

18) Montrer que si $u \in [0,1]$ est solution de (2) alors $\pi_n \leq u$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Aide : vous pourrez démontrer ce résultat par récurrence.)

19) En déduire que $\overline{\pi}$ est la plus petite solution de (2).

20) Pour cette question on suppose que $p_0 + p_1 < 1$ et qu'il existe au moins un point $x_0 \in]0,1[$ tel que $G_X(x_0) < x_0$.

   20.1) Montrer qu'il existe au moins un point $x_1 \in [0,1[$ solution de (2). (Aide : appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(s) := G_X(s) - s$).

   20.2) Montrer que x_1 est l'unique élément de $[0,1[$ solution de (2). (Aide : montrer que si G_X est une fonction strictement convexe alors pour tout $x_2 \in]x_1,1[$ on a $G_X(x_2) < x_2$).

   20.3) Montrer que si $G_X^{(1)}(1) \leq 1$ alors pour tout $s \in [0,1[$ on a $G_X(s) > s$. (Aide : utiliser le fait que le graphe d'une fonction strictement convexe est au dessus de toutes ses tangentes).

   20.4) Démontrer que la réciproque du résultat établi dans la question précédente est vraie. Vous pourrez utiliser le fait que

$$G_X^{(1)}(1) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{G_X(1) - G_X(1-\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

21) Utiliser les résultats de la question 20) pour montrer le résultat suivant.

Proposition – *i) Si $p_0 + p_1 < 1$ et $\mu := \mathbb{E}(X) \in [0,1]$ alors $\overline{\pi} = 1$.*
ii) Si $p_0 + p_1 < 1$ et $\mu > 1$ alors $\overline{\pi} \in [0,1[$ est l'unique solution sur $[0,1[$ de l'équation $G_X(s) = s$.

On s'intéresse à présent au nombre de générations de bactéries observées avant l'extinction de la population. Plus précisément, on introduit la variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ et telle que $Z_\tau > 0$ et $Z_{\tau+1} = 0$.

22) Montrer que $\mathbb{P}(\tau \geq n) = \mathbb{P}(Z_n > 0)$.
23) En utilisant l'indépendance entre Z_n et les variables aléatoires $(X_{i,n},\ i \in \mathbb{N})$, montrer que pour tout $k \geq 1$,
$$\mathbb{E}\left(Z_{n+1} \mid Z_n = k\right) = k\mu.$$
24) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ on a $\mathbb{E}(Z_n) = \mu^n = [\mathbb{E}(X)]^n$ (Aide : utiliser la formule des espérances totales).
25) En déduire que $\mathbb{P}(\tau \geq n) \leq \mu^n$.

Exercice – Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

L'objectif de cet exercice est de démontrer un résultat sur l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson. Ce résultat, établi par Lucien Le Cam, s'énonce ainsi.

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soient S_n et T_n deux variables aléatoires distribuées respectivement selon une loi de poisson de paramètres np avec $p \in]0,1[$ et une loi binomiale de paramètres n et p. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p \in]0,1[$,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |\mathbb{P}([S_n = k]) - \mathbb{P}([T_n = k])| \leq 4np^2. \tag{3}$$

En particulier, si $p = p_n = \lambda / n$ avec $\lambda > 0$, l'inégalité ci-dessus implique que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \mathbb{P}([T_n = k]) - \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| = 0.$$

En d'autres termes, la loi binomiale de paramètres n et λ / n peut être approchée pour n suffisamment grand par une loi de Poisson de paramètre λ.

Les questions ci-dessus reprennent le schéma de la démonstration de L. Le Cam. On introduit tout d'abord le couple aléatoire $(X,Y) : (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{N}^2, \mathscr{P}(\mathbb{N}^2))$ tel que, pour $p \in]0,1[$,

$$\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) = \begin{cases} e^{-p} - p + pe^{-p} & \text{si } i=j=0, \\ p - pe^{-p} & \text{si } i=0 \text{ et } j=1, \\ pe^{-p} & \text{si } i=j=1, \\ e^{-p}p^i/i! & \text{si } i\geq 2 \text{ et } j=0 \end{cases}$$

1) Donner l'expression, en fonction de p, de la probabilité $\mathbb{P}([X\geq 2]\cap[Y=0])$.
2) Déterminer l'ensemble $E\subset\mathbb{N}^2$ des valeurs prises par le couple aléatoire (X,Y).
3) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, donner en fonction de p l'expression de la probabilité $\mathbb{P}([X=k])$. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
4) Donner les expressions des probabilités $\mathbb{P}([Y=0])$ et $\mathbb{P}([Y=1])$. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?
5) Justifier le fait que $\mathbb{P}([X=Y]) = \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=0]) + \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1])$.
6) Montrer que pour tout $x\geq 0$ on a l'inégalité $e^{-x}\geq 1-x$.
7) Déduire des questions 5) et 6) que $\mathbb{P}([X=Y])\geq 1-2p^2$.

On introduit à présent les $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ couples aléatoires $\{(X_i,Y_i),\ i=1,\cdots,n\}$ que l'on suppose indépendants et de même loi que le couple aléatoire (X,Y) introduit en début d'exercice. On pose

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i \text{ et } T_n := \sum_{i=1}^n Y_i.$$

8) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire S_n ? Même question pour la variable aléatoire T_n.
9) En utilisant le fait que si $X_i = Y_i$ pour tout $i=1,\cdots,n$ alors $S_n = T_n$, montrer que

$$[S_n \neq T_n] \subset \bigcup_{i=1}^n [X_i \neq Y_i].$$

10) En déduire que $\mathbb{P}([S_n\neq T_n])\leq 2np^2$.
11) Montrer que $\mathbb{P}([S_n\in A])\leq\mathbb{P}([T_n\in A])+\mathbb{P}([S_n\neq T_n])$ pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{N}$. (Aide : exprimer la probabilité $\mathbb{P}([S_n\in A])$ en utilisant la formule des probabilités totales avec la partition de Ω suivante : $\{[S_n=T_n],[S_n\neq T_n]\}$).
12) En déduire que pour tout $A\subset\mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}([S_n\in A])-\mathbb{P}([T_n\in A])\leq 2np^2$.
13) Montrer que l'on a également $\mathbb{P}([T_n\in A])-\mathbb{P}([S_n\in A])\leq 2np^2$.

On introduit l'ensemble $A_n := \{k\in\mathbb{N} \mid \mathbb{P}([S_n=k]) > \mathbb{P}([T_n=k])\}\subset\mathbb{N}$.

14) Montrer que

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} |\mathbb{P}([S_n = k]) - \mathbb{P}([T_n = k])| &= \mathbb{P}([S_n \in A_n]) - \mathbb{P}([T_n \in A_n]) \\ &+ \mathbb{P}([T_n \in \mathbb{N} \setminus A_n]) - \mathbb{P}([S_n \in \mathbb{N} \setminus A_n]).\end{aligned}$$

15) Déduire l'inégalité (3) des questions précédentes.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2023

Épreuve de français

Durée : 2h

Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas, c'est-à-dire, le plus grand,* comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé.

Vous placerez une simple barre tous les 10 mots et une double barre tous les 50 mots. Vous indiquerez le total des mots utilisés. Vous écrirez une ligne sur deux pour faciliter la correction.

« Déclassement » : le mot est aujourd'hui sur toutes les lèvres. Il désigne un phénomène de rupture qui conduit un individu à perdre sa position sociale. Plus de 300.000 salariés, hier encore protégés par un contrat à durée indéterminée, ont été licenciés au cours de l'année 2009 et sont aujourd'hui au chômage, sans autre perspective que de longs mois d'incertitude financière et psychologique.

[...] Aujourd'hui omniprésente, la notion de déclassement traduit donc une réalité pressante et sensible, dont de nombreux travaux ont tenté récemment de prendre la mesure. Mais elle doit être distinguée d'un autre phénomène, encore plus décisif : la peur du déclassement.

Cette angoisse sourde, qui taraude un nombre croissant de Français, repose sur la conviction que personne n'est « à l'abri », qu'une épée de Damoclès pèse sur les salariés et leurs familles, que tout un chacun risque à tout moment de perdre son emploi, son salaire, ses prérogatives, en un mot son statut. La peur du déclassement ne règne pas tant aux marges de la société qu'en son cœur. Elle assiège les ouvriers, les employés, les travailleurs précaires, mais, plus encore, les classes moyennes et supérieures, celles qui bénéficient des meilleurs statuts et des protections les plus efficaces et qui ont donc beaucoup à perdre. Elle commande la perception de soi, les formes de la confiance, les attentes, la représentation que l'on se fait de l'avenir.

Le déclassement et la peur du déclassement : les deux phénomènes ne sont ni de même nature, ni de même ampleur, et il est essentiel de ne pas les confondre si l'on veut comprendre les problèmes dont souffre aujourd'hui la société française. Un exemple suffira à montrer tout ce qui les distingue. En 2007, l'INSEE recensait 14.600 sans-abri ; si l'on retient le chiffre de 100.000 personnes, avancé par les associations d'aide aux SDF, on peut calculer que 0,16 % de la population vit dans la rue. Or, d'après un sondage réalisé en 2006, 48 % des Français pensent qu'ils pourraient un jour devenir SDF ; deux ans plus tard, avec la récession, cette peur s'est encore accrue, 60 % des personnes s'estimant désormais menacées.

Si le déclassement est un fait que l'on peut mesurer statistiquement et qui touche d'abord les populations fragiles, la peur du déclassement est d'un autre ordre : elle est un phénomène global et diffus qui, en gouvernant l'imaginaire des individus et des groupes, commande de très nombreux comportements et mouvements sociaux. Elle n'a rien d'une idéologie abstraite ; au contraire, elle repose sur un ensemble de faits bien réels, mais elle en extrapole le sens et en redouble l'ampleur. Elle est une variable-clé pour rendre compte du fonctionnement de la politique, de l'économie et de la société françaises.

Avant de comprendre pourquoi cette angoisse est devenue aussi répandue, il faut prendre la mesure du drame personnel et familial que constitue le déclassement dans la France d'aujourd'hui, tout particulièrement quand il frappe des salariés au beau milieu de leur carrière. Dans un rapport remis en juillet 2009 à la secrétaire d'État à la prospective, les chercheurs du Centre d'analyse stratégique ont bien mis en lumière la complexité du phénomène. Être licencié, en France, c'est d'abord subir une période de chômage parmi les plus longues des pays développés ; c'est ensuite être condamné à ne retrouver que des formes précaires et dégradées d'emploi, sans rapport avec le statut initialement perdu ; et il va sans dire qu'une telle relégation est lourde de conséquences financières et psychologiques. Ainsi entendu, le déclassement frappe en priorité les ouvriers et les employés, notamment dans les PME ; mais il touche de plus en plus les cadres du privé, dont les statuts, naguère si solides, se sont fragilisés à mesure que leurs emplois se banalisaient. Les fonctionnaires restent à l'abri de ces formes radicales de déclassement, mais ils ne sont pas protégés contre les remises en cause rampantes de leurs avantages statutaires (en termes de retraite par exemple), ni contre la progressive détérioration de leurs conditions de travail, aggravée par les départs à la retraite non renouvelés et les baisses d'effectifs.

Qu'elles travaillent dans le public ou le privé, qu'elles soient salariées ou indépendantes, les familles sont menacées par une autre forme de déclassement : celle qui survient lorsque les enfants ne parviennent pas à se faire une place sur le marché du travail et dans la société. [...] En 2008, parmi les jeunes sortis de l'école depuis moins de 5 ans, 47 % des non-diplômés étaient au chômage contre à peine 7 % des diplômés du supérieur, soit un écart de 40 points encore jamais atteint par le passé. Échouer à l'école n'a jamais été aussi disqualifiant.

Il y a donc une réalité du déclassement, et celle-ci est terrible : elle affecte l'équilibre des individus et des familles tout en minant les fondements du pacte social. Et pourtant, l'immense majorité des Français reste à l'abri d'un déclassement effectif. Si le déclassement est au cœur des préoccupations d'un si grand nombre de personnes, ce n'est pas parce qu'elles ou leurs proches l'ont subi ; c'est parce que son coût potentiel n'a jamais été aussi important. Ce que l'on pourrait perdre est tellement fondamental, constitue à tel point le socle de tout notre être social, que ce seul risque suffit à nourrir une anxiété d'ordre existentiel. Les pays où les pertes d'emploi suscitent la plus grande peur sont paradoxalement ceux où les emplois sont les mieux protégés et les statuts les plus difficiles à perdre : la probabilité de retrouver un emploi protégé y étant mécaniquement plus faible, ce qui se perd est beaucoup plus précieux qu'ailleurs. [...]

La notion française de déclassement n'a guère d'équivalent aujourd'hui dans les pays anglo-saxons et scandinaves. Elle est symptomatique de notre vieille société inégalitaire et hiérarchique, encore aristocratique à de nombreux égards, où rangs et dignités s'accordent pour la vie et ont vocation à rester dans la famille. [...] Ce qui se développe en premier lieu aujourd'hui n'est pas le déclassement effectif des classes populaires, mais la peur du déclassement au sein des classes moyennes et supérieures, avec tout ce que cela implique de comportements séparatistes en matière résidentielle et scolaire. [...]

Les découvertes scientifiques, les progrès techniques, la croissance économique sont des facteurs de changement social ; mais les périodes de stagnation jouent aussi un rôle primordial dans l'élaboration des sociétés. Quand elles surviennent, les récessions ont pour conséquence première d'augmenter la polarisation sociale et le coût que représente la perte d'un statut protégé. Cet effet social entraîne la diffusion, dans toute la société, d'une peur du déclassement (effet psychologique), laquelle déclenche à son tour un ensemble de décisions et de comportements qui remodèlent de fond en comble le paysage idéologique (effet politique), même longtemps après que la récession a pris fin. Ici résident ses effets les plus durables. L'expérience universellement partagée n'est donc pas celle du déclassement (qui ne survient qu'au prix d'une destruction de la société, comme dans l'Allemagne des années 1920), mais celle de la peur du déclassement. [...]

Pour étudier ce phénomène, observable lors des grandes crises que la France a traversées (par exemple en 1974 et en 1993), il faut esquisser une sociologie des récessions, qui ne peut se déployer que sur le long terme et dans un triple registre social, psychologique et politique... L'Enquête emploi de l'INSEE qui couvre la période 1975-2008 livre des informations capitales sur le rôle respectif de l'origine sociale et des diplômes au moment de l'insertion sur le marché du travail. On voit alors à quel point les récessions influencent les comportements et infléchissent les attentes, tout particulièrement au sein des générations qui les ont subies au moment d'entrer sur le marché du travail ; en un mot, à quel point les récessions, en raison de leur caractère profondément anxiogène, façonnent les sociétés en accentuant leur propension au pessimisme et au conservatisme social.

Éric Maurin, « La peur du déclassement. Une sociologie des récessions ».
Seuil (La République des Idées) 2009, pp. 5-11.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2023

Épreuve d'anglais

Durée : 2h

L'épreuve est constituée de deux parties : un résumé et une traduction. Vous rédigerez ces deux parties sur **deux copies séparées**, sur lesquelles vous indiquerez respectivement « Anglais / résumé » et « Anglais / traduction ».

1 Summarize this text in English in 200 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

The Real World Costs of the digital race for bitcoin
By Gabriel J.X. Dance. April 9, 2023

Texas was gasping for electricity. Winter Storm Uri had knocked out power plants across the state, leaving tens of thousands of homes in icy darkness. By the end of Feb. 14, 2021, nearly 40 people had died, some from the freezing cold.

Meanwhile, in the husk of a onetime aluminum smelting plant an hour outside of Austin, row upon row of computers were using enough electricity to power about 6,500 homes as they raced to earn Bitcoin, the world's largest cryptocurrency.

The computers were performing trillions of calculations per second, hunting for an elusive combination of numbers that Bitcoin's algorithm would accept. About every 10 minutes, a computer somewhere guesses correctly and wins a small number of Bitcoins worth, in recent weeks, about $170,000. Anyone can try, but to make a business of it can require as much electricity as a small city.

In Texas, the computers kept running until just after midnight. Then the state's power grid operator ordered them shut off, under an agreement that allowed it to do so if the system was about to fail. In return, it began paying the Bitcoin company, Bitdeer, an average of $175,000 an hour to keep the computers offline. Over the next four days, Bitdeer would make more than $18 million for not operating, from fees ultimately paid by Texans who had endured the storm.

The New York Times has identified 34 such large-scale operations, known as Bitcoin mines, in the United States, all putting immense pressure on the power grid and most finding novel ways to profit from doing so. Their operations can create costs — including higher electricity bills and enormous carbon pollution — for everyone around them, most of whom have nothing to do with Bitcoin.

Until June 2021, most Bitcoin mining was in China. Then it drove out Bitcoin operations, at least for a time, citing their power use among other reasons. The United States quickly became the industry's global leader.

Since then, precisely how much electricity Bitcoin mines are using in America and their effect on energy markets and the environment have been unclear. The Times, using both public and confidential records as well as the results of studies it commissioned, put the most comprehensive estimates to date on the largest operations' power use and the ripple effects of their voracious demand.00 It is as if another New York City's worth of residences were now drawing on the nation's power supply, The Times found.

In some areas, this has led prices to surge. In Texas, where 10 of the 34 mines are connected to the state's grid, the increased demand has caused electric bills for power customers to rise nearly 5 percent, or $1.8 billion per year, according to a simulation performed for The Times by the energy research and consulting firm Wood Mackenzie.

The additional power use across the country also causes as much carbon pollution as adding 3.5 million gas-powered cars to America's roads, according to an analysis by WattTime, a nonprofit tech company. Many of the Bitcoin operations promote themselves as environmentally friendly and set up in areas rich with renewable energy, but their power needs are far too great to be satisfied by those sources alone. As a result, they have become a boon for the fossil fuel industry: WattTime found that coal and natural gas plants kick in to meet 85 percent of the demand these Bitcoin operations add to their grids.

Their massive energy consumption combined with their ability to shut off almost instantly allows some companies to save money and make money by deftly pulling the levers of U.S. power markets. They can avoid fees charged during peak demand, resell their electricity at a premium when prices spike and even be paid for offering to turn off. Other major energy users, like factories and hospitals, cannot reduce their power use as routinely or dramatically without severe consequences.

In some states, notably New York, Pennsylvania and Texas, Bitcoin operators' revenue can ultimately come from other power customers. The clearest example is Texas, where Bitcoin companies are paid by the grid operator for promising to quickly power down if necessary to prevent blackouts. In practice, they rarely are asked to shut down and instead earn additional money while doing exactly what they would have been doing anyway: seeking Bitcoin. Five operations have collectively made at least $60 million from that program since 2020, records show.

Several of the companies are being paid through these agreements a majority of the time they operate. Most years, they are asked to turn off for only a few hours, at which point they are paid even more.

The windfall for Bitdeer during Winter Storm Uri came through this program, in exchange for a fraction of the power it typically used. The company did not respond to requests for comment. Another Bitcoin company made tens of millions of dollars reselling electricity during the storm — and ultimately stands to earn as much as $125 million — according to its financial filings, which were previously reported by the Tech Transparency Project. A third company told investors that another natural disaster like Uri could be a significant business opportunity.

"Ironically, when people are paying the most for their power, or losing it altogether, the miners are making money selling energy back to Texans at rates 100 times what they paid," said Ed Hirs, who teaches energy economics at the University of Houston and has been critical of the industry. In interviews and statements, many of the companies said they were no different from other large power users except for their willingness to shut off quickly to benefit the grid. Several objected to the method The Times and WattTime used to estimate their emissions, which calculated the pollution caused by the additional power generated to satisfy the mines' demand, showing it to overwhelmingly come from fossil fuels.

The companies said this method held them to an unfair standard. "The analysis cited could be used to attack any industry that consumes power," said David Fogel, the chief executive of Coinmint, which operates in upstate New York. "I think the entire notion of singling out specific industries like this is unfair."

But WattTime's method is the one many energy and climate experts recommend for measuring the environmental effects of increased power use by any industry, particularly one that grows so large so suddenly.

Some in the industry have pushed back against suggestions that it is directly responsible for any environmental harm.

A May 2022 letter to the Environmental Protection Agency, signed by many of the biggest companies, said their operations "released" no pollutants. "Bitcoin miners have no emissions whatsoever," it said. "Associated emissions are a function of electricity generation."

Nic Carter, a partner at a crypto-focused venture capital firm and a prominent Bitcoin advocate who told The Times he was the letter's primary author, said he was playing a "language game" when he wrote that Bitcoin mining has no emissions. At the time, he said, he felt the industry was being unfairly singled out.

"Maybe the more sincere point is like, we're already fully aware of the emissions associated with utilities generating grid power," he said.

Many academics who study the energy industry said Bitcoin mining was undoubtedly having significant environmental effects.

"They're adding hundreds of megawatts of new demand when we already face the need to rapidly cut fossil power," said Jesse Jenkins, a Princeton professor who studies electrical grid emissions. "If you care about climate change," he added, "then that's a problem."

2 Translate the following text into French

FTX founder Sam Bankman-Fried to be released on $250 million bail and will live with his parents

By Associated Press. Updated: 23/12/2022

Cryptocurrency entrepreneur Sam Bankman-Fried walked out of a Manhattan courthouse on Thursday with his parents after they agreed to sign a $250 million bond and keep him at their California home while he awaits trial on charges that he swindled investors and looted customer deposits on his FTX trading platform.

Assistant US Attorney Nicolas Roos said in federal court that Bankman-Fried, 30, "perpetrated a fraud of epic proportions".

Roos proposed strict bail terms, including the $250 million bond — which he said is believed to be the largest federal pretrial bond ever — and house arrest at his parents' home in Palo Alto. An important reason for allowing bail was that Bankman-Fried, who had been jailed in the Bahamas, agreed to be extradited to the US, Roos said.

Reunited with his parents and lawyers inside the courthouse, an apparently silent Bankman-Fried shook the hands of a supporter before heading out the door, where photographers and video crews rushed him until he left in a car.

Magistrate Judge Gabriel W Gorenstein agreed to the bond and house arrest, though he required that an electronic monitoring bracelet be affixed to Bankman-Fried before he left the courthouse. Roos had asked it be attached Friday in California.

Bankman-Fried was shackled at the ankles when he entered the courtroom in a suit and tie to take a seat between his attorneys. Near the end of the hearing, he was asked by Gorenstein whether he understood he would face arrest and owe $250 million if he chose to flee.

"Yes, I do," Bankman-Fried answered.

Soon afterwards, the hearing ended and Bankman-Fried, his hands in his front pants pockets, was led out by two US marshals. His next court date was scheduled for Jan. 3, when he is to appear before the judge who will preside over the case.