

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Corrections

L'Épreuve est constitué de trois exercices indépendants.

Rappel : Les corrigés sont proposés à titre informatif. N'hésitez pas à contribuer et proposer des améliorations en nous contactant : contact@ceas.fr.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Corrigé Session 2024

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve de mathématiques

Éléments de correction

Exercice 1. Probabilités

Question 1. (a)

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$ en fonction de celles de X et Y , et en déduire une relation entre G_{X+Y} , G_X et G_Y .

Solution

1. Détermination de la loi de $X + Y$

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes. Pour une valeur donnée k , la probabilité que $X + Y = k$ est donnée par :

$$P(X + Y = k) = \sum_{n=0}^k P(X = n)P(Y = k - n).$$

Cela découle de l'indépendance des deux variables et de la formule des probabilités totales.

2. Relation entre les fonctions génératrices

Par définition, la fonction génératrice $G_{X+Y}(t)$ est donnée par :

$$G_{X+Y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X + Y = k) t^k.$$

En substituant $P(X + Y = k)$, on obtient :

$$G_{X+Y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^k P(X = n)P(Y = k - n) \right) t^k.$$

En réorganisant les termes et en utilisant la linéarité des sommes :

$$G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) t^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} P(Y = m) t^m.$$

Ici, $m = k - n$, donc cette somme devient le produit des séries infinies :

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t).$$

Question 1. (b)

Généraliser le résultat précédent à la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Solution

1. Détermination de la loi de la somme $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

La probabilité que $S_n = k$ est donnée par :

$$P(S_n = k) = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_n = k} P(X_1 = k_1) P(X_2 = k_2) \dots P(X_n = k_n).$$

Cela découle de l'indépendance mutuelle des variables aléatoires et de la formule des probabilités totales appliquée récursivement.

2. Relation entre les fonctions génératrices

Par définition, la fonction génératrice de S_n , notée $G_{S_n}(t)$, est :

$$G_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(S_n = k) t^k.$$

En utilisant la relation de convolution pour la somme $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, et par récurrence sur n , on obtient :

$$G_{S_n}(t) = G_{X_1}(t) \cdot G_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot G_{X_n}(t).$$

En particulier, si toutes les variables aléatoires X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ont la même loi (i.e., $X_1 \sim X_2 \sim \dots \sim X_n$), avec une fonction génératrice commune $G_X(t)$, alors :

$$G_{S_n}(t) = [G_X(t)]^n.$$

Question 2. (a)

Soit U la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$. Déterminer sa fonction génératrice $G_U(t)$ et déterminer toutes les racines réelles de $G_U(t)$ ainsi que leur multiplicité.

Solution

1. Détermination de la fonction génératrice $G_U(t)$

La loi U est uniforme sur l'ensemble $\{2, 3, \dots, 12\}$. Cela signifie que chaque valeur k dans cet ensemble a une probabilité égale à :

$$P(U = k) = \frac{1}{11} \quad \text{pour } k = 2, 3, \dots, 12.$$

Par définition, la fonction génératrice $G_U(t)$ est donnée par :

$$G_U(t) = \sum_{k=2}^{12} P(U = k) t^k.$$

En substituant $P(U = k) = \frac{1}{11}$, on obtient :

$$G_U(t) = \frac{1}{11} \sum_{k=2}^{12} t^k.$$

Cette somme est une somme partielle d'une série géométrique. En factorisant t^2 , on obtient :

$$G_U(t) = \frac{1}{11} t^2 \sum_{k=0}^{10} t^k.$$

La somme $\sum_{k=0}^{10} t^k$ est une somme géométrique dont la formule est :

$$\sum_{k=0}^n t^k = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}, \quad \text{pour } t \neq 1.$$

En appliquant cette formule avec $n = 10$, on a :

$$\sum_{k=0}^{10} t^k = \frac{1 - t^{11}}{1 - t}.$$

Ainsi, la fonction génératrice devient :

$$G_U(t) = \frac{1}{11} \cdot \frac{t^2(1 - t^{11})}{1 - t}, \quad \text{pour } t \neq 1.$$

2. Détermination des racines réelles de $G_U(t)$

Les racines de $G_U(t)$ sont les valeurs de t qui annulent le numérateur $t^2(1 - t^{11})$, à l'exception de celles qui annuleraient le dénominateur $1 - t$.

1. Racines provenant de t^2 :

$$t^2 = 0 \Rightarrow t = 0 \quad (\text{racine double}).$$

2. Racines provenant de $1 - t^{11}$:

$$1 - t^{11} = 0 \Rightarrow t^{11} = 1.$$

Les racines sont donc les 11-èmes racines de l'unité :

$$t = e^{2i\pi k/11}, \quad k = 0, 1, \dots, 10.$$

Parmi ces racines, seules $t = 1$ ($k = 0$) est réelle.

3. Racine provenant de $1 - t$:

$$1 - t = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Cependant, cette racine est annulée par la simplification du dénominateur.

3. Multiplicité des racines

- $t = 0$ a une multiplicité de 2, car elle provient de t^2 .

Question 2. (b)

Supposons que l'on ait un dé à 6 faces tel que la probabilité d'apparition de la face $i \in \{1, \dots, 6\}$ soit égale à p_i , avec $p_i \in]0, 1[$. Soit X la variable aléatoire associée à l'apparition d'une face. Montrer que G_X admet une racine non nulle.

Solution

1. Définition de la fonction génératrice $G_X(t)$

La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, avec des probabilités associées $P(X = i) = p_i$. La fonction génératrice $G_X(t)$ est donnée par :

$$G_X(t) = \sum_{i=1}^6 p_i t^i.$$

2. Étude des racines de $G_X(t)$

Le polynôme $G_X(t)$ est de degré 6 :

$$G_X(t) = p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + p_4 t^4 + p_5 t^5 + p_6 t^6,$$

où les coefficients p_i sont strictement positifs ($p_i > 0$) car $p_i \in]0, 1[$ pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$.

3. Argument pour l'existence d'une racine non nulle

Le polynôme $G_X(t)$ est défini sur $\mathbb{R}$, mais il peut être considéré comme un polynôme sur $\mathbb{C}$, le corps des nombres complexes. Tout polynôme non constant de degré n a exactement n racines complexes (comptées avec multiplicité). Les racines de $G_X(t)$ peuvent être :

- réelles (positives ou négatives) ;
- complexes non réelles (apparaissant par paires conjuguées si les coefficients du polynôme sont réels).

Étant donné que $G_X(t)$ est de degré 6, il a précisément 6 racines complexes. Parmi elles :

- $t = 0$ est une racine triviale due au terme t^i pour $i \geq 1$.
- Les autres racines $t \neq 0$ satisfont $G_X(t) = 0$.

4. Existence d'une racine réelle non nulle

Le polynôme $G_X(t)$ satisfait les conditions suivantes : $G_X(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$, et $G'_X(0) = p_1 > 0$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} G_X(t) = +\infty$. Au voisinage de 0, $G_X(t)$ devient négative pour $t < 0$. Il est clair que $G_X(t) = 0$ pour au moins un $t < 0$, et ainsi, $G_X(t)$ admet au moins une racine non nulle.

Question 2. (c)

On veut montrer qu'il n'est pas possible de construire un dé faussé à 6 faces (numérotées de 1 à 6) tel que si on le lance deux fois, la somme des deux résultats obtenus suive une loi uniforme sur $\{2, 3, 4, \dots, 12\}$.

Solution

Synthèse des réponses aux questions 2.(a) et 2.(b)

1. Fonction génératrice de la loi uniforme U (Question 2.(a)) La fonction génératrice de la loi uniforme U sur $\{2, 3, \dots, 12\}$ est donnée par :

$$G_U(t) = \frac{1}{11} \cdot \frac{t^2(1 - t^{11})}{1 - t}.$$

Les racines réelles de $G_U(t)$ sont : $t = 0$ avec une multiplicité de 2.

2. Fonction génératrice du dé à 6 faces (Question 2.(b)) La fonction génératrice associée au dé est :

$$G_X(t) = p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + p_4 t^4 + p_5 t^5 + p_6 t^6,$$

où $p_i > 0$ pour $i = 1, \dots, 6$, et $\sum_{i=1}^6 p_i = 1$.

Nous avons démontré que $G_X(t)$ admet au moins une racine non nulle.

Démonstration que U ne peut pas être obtenu par deux lancers

Si un dé faussé à 6 faces pouvait générer une loi uniforme U sur $\{2, 3, \dots, 12\}$ par la somme de deux lancers, alors la fonction génératrice $G_U(t)$ de cette loi uniforme serait donnée par le carré de la fonction génératrice du dé :

$$G_U(t) = [G_X(t)]^2.$$

1. Analyse des racines :

- $G_X(t)$ admet au moins une racine non nulle réelle.
- Cela implique que $[G_X(t)]^2$ admet également des racines non nulles réelles, mais avec des multiplicités doublées.

2. Incompatibilité avec $G_U(t)$:

- Les seules racines réelles de $G_U(t)$ sont $t = 0$ (multiplicité 2).
- Si $G_U(t) = [G_X(t)]^2$, alors les racines de $G_U(t)$ proviendraient uniquement des racines de $G_X(t)$. Or, $G_X(t)$ ne peut pas produire une structure des racines cohérente avec $G_U(t)$.

Conclusion

Il est impossible de construire un dé à 6 faces avec des probabilités $p_i > 0$ pour lesquelles la somme de deux lancers suit une loi uniforme sur $\{2, 3, \dots, 12\}$. La structure des fonctions génératrices $G_X(t)$ et $G_U(t)$ est incompatible.

Question 3. (a)

Préciser la fonction caractéristique de N , où N est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Solution

Définition de la fonction caractéristique

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire N est définie par :

$$\phi_N(t) = \mathbb{E}[e^{itN}],$$

où $t \in \mathbb{R}$.

Propriétés de la loi de Poisson

La variable N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. La probabilité qu'elle prenne la valeur k est donnée par :

$$P(N = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Calcul de la fonction caractéristique

La fonction caractéristique s'écrit alors :

$$\phi_N(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P(N = k).$$

En substituant $P(N = k)$, on obtient :

$$\phi_N(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

En regroupant les termes $e^{-\lambda}$ et $\frac{\lambda^k}{k!}$, cela devient :

$$\phi_N(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}.$$

La série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ est le développement en série de Taylor de e^z . En utilisant cette propriété, on a :

$$\phi_N(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}}.$$

Cela peut être simplifié en :

$$\phi_N(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Question 3. (b)

Déterminer la fonction caractéristique de Y , où Y est la variable aléatoire correspondant au nombre de produits vendus par jour. Montrer que Y suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Solution

Modèle pour Y

- N , le nombre de clients par jour, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
- Chaque client achète un produit avec une probabilité $p \in [0, 1]$, et ces décisions sont indépendantes entre les clients.

La variable Y (le nombre total de produits vendus par jour) est alors la somme de N variables indicatrices indépendantes :

$$Y = \sum_{i=1}^N Z_i,$$

où Z_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p (i.e., $P(Z_i = 1) = p$, $P(Z_i = 0) = 1 - p$).

Fonction caractéristique de Y

La fonction caractéristique de Y , notée $\phi_Y(t)$, est donnée par :

$$\phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{itY}].$$

Étape 1 : Conditionnement sur N En conditionnant sur $N = n$, Y est la somme de n variables indicatrices indépendantes :

$$\phi_Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \mathbb{E}[e^{itY} \mid N = n].$$

Si $N = n$, alors $Y = \sum_{i=1}^n Z_i$, où chaque Z_i est indépendante. On a :

$$\mathbb{E}[e^{itY} \mid N = n] = \mathbb{E}[e^{itZ_1}]^n,$$

car les Z_i sont indépendantes et identiquement distribuées.

Pour une variable de Bernoulli Z_i , la fonction caractéristique est :

$$\mathbb{E}[e^{itZ_i}] = (1 - p) + pe^{it}.$$

Donc :

$$\mathbb{E}[e^{itY} \mid N = n] = [(1 - p) + pe^{it}]^n.$$

Étape 2 : Expression non conditionnée La probabilité $P(N = n)$ pour N suivant une loi de Poisson est donnée par :

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}.$$

En substituant :

$$\phi_Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} [(1 - p) + pe^{it}]^n.$$

Regroupons les termes :

$$\phi_Y(t) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda((1 - p) + pe^{it})]^n}{n!}.$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$, donc :

$$\phi_Y(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda((1-p)+pe^{it})}.$$

Simplifions :

$$\phi_Y(t) = e^{\lambda(-1+(1-p)+pe^{it})}.$$

Finalement, on obtient :

$$\phi_Y(t) = e^{\lambda(p(e^{it}-1))}.$$

Loi de Y

La fonction caractéristique obtenue est celle d'une loi de Poisson avec paramètre $\lambda_Y = \lambda p$. Par conséquent :

$$Y \sim \text{Poisson}(\lambda p).$$

Exercice 2. Autour de la constante d'Euler.

Partie 1 - Question 1

Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a l'inégalité $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$, et utiliser cette inégalité pour montrer que la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Solution

1. Montrons que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$

Définition des termes La somme partielle H_n de la série harmonique est définie comme :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad H_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

La différence $H_{2n} - H_n$ est donnée par :

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Minoration de la somme Dans la somme $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$, tous les k sont compris entre $n+1$ et $2n$. Ainsi :

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}, \quad \text{pour tout } k \in \{n+1, n+2, \dots, 2n\}.$$

Il y a n termes dans la somme $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Par conséquent :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n}.$$

En simplifiant :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, on a montré que :

$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

2. Montrons que la série harmonique diverge

H_n est une somme partielle de la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. En répétant l'inégalité $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ à chaque étape, on observe que H_{2n} croît d'au moins $\frac{1}{2}$ à chaque doublement de n . Cela montre que H_n n'est pas bornée et donc que la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Partie 1 - Question 2. (a)

Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\left| \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{C}{n^2}.$$

Solution

Analyse de l'expression

Développement en série de $\ln(1+x)$ Pour $|x| < 1$, la fonction logarithme naturel $\ln(1+x)$ admet le développement en série suivant :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots.$$

En tronquant après le premier terme, nous obtenons une approximation : $\ln(1+x) \approx x$. L'erreur d'approximation est donnée par :

$$R(x) = \ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots.$$

Application avec $x = \frac{1}{n}$ En remplaçant x par $\frac{1}{n}$, on obtient :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \dots.$$

L'ordre dominant de l'erreur est donc $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Majoration de l'erreur

Pour majorer l'erreur, utilisons une borne supérieure sur la série restante. Le reste $R(x)$ peut être écrit comme :

$$R(x) = \ln(1+x) - x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}.$$

Pour $x = \frac{1}{n}$, cela devient :

$$R\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{kn^{k-2}}.$$

Comme $n^{k-2} = e^{(k-2)\ln(n)} \geq e^{(k-2)\ln(2)}$, pour $n \geq 2$, on en déduit que la série $\sum_{k=2}^{\infty} 1/(kn^{k-2})$ est convergente. On peut donc écrire :

$$\left| \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{C}{n^2},$$

où C est une constante positive.

Remarque : On pourra aussi utiliser la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $[0, 1/n]$.

Partie 1 - Question 2. (b)

En déduire que la série :

$$\sum_{n \geq 1} \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right)$$

converge, puis qu'il existe une constante γ telle que :

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Solution

1. Convergence de la série

Expression de la différence dans la somme La différence dans la somme est donnée par :

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Donc, la série devient :

$$\sum_{n \geq 1} \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n \geq 1} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right).$$

Majoration des termes de la série D'après la question 2.(a), nous savons que :

$$\left| \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{C}{n^2},$$

où $C > 0$ est une constante.

Ainsi, les termes de la série sont majorés en valeur absolue par $\frac{C}{n^2}$.

Convergence de la série La série $\sum_{n \geq 1} \frac{C}{n^2}$ est une série de type p -série avec $p = 2 > 1$, qui converge. Par le critère de majoration, la série donnée converge également.

2. Approximation asymptotique de H_n

Décomposition de H_n Par définition, H_n est la somme harmonique partielle :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On peut la décomposer en :

$$H_n = \ln(n+1) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \right).$$

Convergence de la correction La somme corrective :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \right)$$

converge, comme démontré dans la première partie. Sa limite définit une constante, appelée la constante d'Euler-Mascheroni et est notée γ .

Expression asymptotique En regroupant, on obtient l'approximation asymptotique de H_n :

$$\begin{aligned} H_n &= \ln n + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \ln n + \gamma + o(1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni.

Partie 2 - Question 3

Montrer que les intégrales impropres

$$\int_0^1 \ln(t) e^{-t} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{\infty} \ln(t) e^{-t} dt$$

sont convergentes.

Solution

Étape 1 : Intégrale sur $[0, 1]$

Analysons l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) e^{-t} dt$.

Comportement de $\ln(t)$ près de $t = 0$

- La fonction $\ln(t)$ diverge négativement lorsque $t \rightarrow 0^+$.
- Le facteur e^{-t} tend vers 1 pour $t \rightarrow 0^+$.

Convergence Dans cette région, pour tout $\epsilon > 0$,

$$|\ln(t) e^{-t}| = |\ln(t)| \cdot e^{-t}.$$

On utilise une majoration : $|\ln(t)| \leq -\ln(t)$ (car $\ln(t)$ est négatif pour $t \in (0, 1)$).

Pour tester la convergence :

- $\ln(t)$ diverge en $t \rightarrow 0^+$, mais le produit $|\ln(t)| \cdot t^a$ converge vers 0 pour tout $a > 0$.
- Prenons $0 < a < 1$: l'intégrale de t^{-a} est convergente, donc l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) e^{-t} dt$ converge sur $[0, 1]$.

Étape 2 : Intégrale sur $[1, \infty]$

Analysons l'intégrale $\int_1^\infty \ln(t) e^{-t} dt$.

Comportement de $\ln(t) e^{-t}$ pour $t \rightarrow \infty$

- Pour t grand, $\ln(t)$ croît lentement, mais e^{-t} décroît exponentiellement plus vite.
- Par comparaison avec $\frac{\ln(t)}{e^t}$, cette intégrale est dominée par une fonction qui converge rapidement vers 0.

Convergence Pour tester la convergence :

$$|\ln(t) e^{-t}| \leq \ln(t) \cdot e^{-t}.$$

La convergence est assurée car $e^{-t} = e^{-t/2} e^{-t/2}$ et $e^{-t/2}$ domine tout terme polynomial et aussi $\ln(t)$.

Conclusion

Les deux intégrales impropres sont convergentes :

$$\int_0^1 \ln(t) e^{-t} dt \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \ln(t) e^{-t} dt.$$

Partie 2 - Questions 4. (a) et 4. (b)

Question 4. (a)

Montrer que, pour tout $u \in]-1, \infty[$,

$$\ln(1 + u) \leq u.$$

Solution

1. Considérons la fonction $f(u) = \ln(1+u) - u$, définie sur $u \in]-1, \infty[$.

2. Calculons sa dérivée :

$$f'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 = \frac{1 - (1+u)}{1+u} = -\frac{u}{1+u}.$$

3. Observons les propriétés de $f'(u)$:

- Lorsque $u \in]-1, 0]$, $f'(u) \geq 0$, donc $f(u)$ est croissante sur cet intervalle.
- Lorsque $u \in [0, \infty[$, $f'(u) \leq 0$, donc $f(u)$ est décroissante sur cet intervalle.

4. Calculons $f(0)$:

$$f(0) = \ln(1+0) - 0 = 0.$$

5. Puisque $f(u)$ est croissante pour $u < 0$ et décroissante pour $u > 0$, et que $f(0) = 0$, on a $f(u) \leq 0$ pour tout $u \in]-1, \infty[$.

En conclusion :

$$\ln(1+u) \leq u \quad \text{pour tout } u \in]-1, \infty[.$$

Question 4. (b)

En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout $t \in [0, n]$,

$$0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leq e \cdot e^{-t}.$$

Solution Examinons $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}$ pour $t \in [0, n]$. Tout d'abord, $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}$ est bien définie et positive car $t \in [0, n]$, donc $1 - \frac{t}{n} \geq 0$.

Prenons le logarithme de cette expression :

$$\ln\left(\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}\right) = (n-1) \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right).$$

Par la question 4(a), pour $u = -\frac{t}{n}$, on a :

$$\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}.$$

Donc,

$$(n-1) \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -(n-1) \frac{t}{n}.$$

Par exponentiation, on obtient :

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leq \exp\left(-(n-1) \frac{t}{n}\right).$$

Simplifions l'exposant :

$$-(n-1) \frac{t}{n} = -t + \frac{t}{n}.$$

Ainsi,

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leq e^{-t} \cdot e^{\frac{t}{n}}.$$

Pour $t \in [0, n]$, on a $e^{\frac{t}{n}} \leq e$, donc :

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leq e \cdot e^{-t}.$$

Partie 2 - Question 5

Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt = \int_0^\infty \ln(t) e^{-t} dt.$$

Solution

On peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt &= \int_0^\infty \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \mathbb{I}_{\{t \leq n\}} dt \\ &= \int_0^\infty \ln(t) f_n(t) dt. \end{aligned}$$

D'après la question 4,

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \mathbb{I}_{\{t \leq n\}} \leq e \cdot e^{-t}.$$

Il est également facile de montrer que f_n converge simplement vers f avec $f(t) = e^{-t}$. Enfin, d'après la question 3, $\int_0^\infty \ln(t) e^{-t} dt$ est bien définie. On déduit le résultat par le théorème de convergence dominée rappelé dans l'énoncé.

Partie 2 - Question 6

Montrer successivement les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt &= \ln(n) + \int_0^1 n \ln(u) (1-u)^{n-1} du \\ &= \ln(n) + \int_0^1 \frac{1}{u} [(1-u)^{n-1} - 1] du. \end{aligned}$$

Solution

1. **Première égalité :** On part de l'intégrale donnée :

$$\int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt.$$

En utilisant le changement de variable $t = nu$, où $u \in [0, 1]$, on a $dt = n du$ et $t = nu$. L'intégrale devient :

$$\int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt = \int_0^1 \ln(nu) (1-u)^{n-1} n du.$$

On utilise la propriété du logarithme $\ln(nu) = \ln(n) + \ln(u)$ pour réécrire l'intégrale comme suit :

$$\int_0^1 \ln(nu) (1-u)^{n-1} n du = n \int_0^1 [\ln(n) + \ln(u)] (1-u)^{n-1} du.$$

En séparant les termes, on obtient :

$$n \ln(n) \int_0^1 (1-u)^{n-1} du + n \int_0^1 \ln(u) (1-u)^{n-1} du.$$

Le premier terme est :

$$n \ln(n) \int_0^1 (1-u)^{n-1} du.$$

L'intégrale $\int_0^1 (1-u)^{n-1} du$ est bien connue et vaut $\frac{1}{n}$. Ainsi, ce terme devient :

$$n \ln(n) \cdot \frac{1}{n} = \ln(n).$$

2. **Seconde égalité :** Le second terme est :

$$n \int_0^1 \ln(u) (1-u)^{n-1} du.$$

Par intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} & n \int_0^1 \ln(u) (1-u)^{n-1} du \\ &= -n \left[\ln(u) \frac{(1-u)^n - 1}{n} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du \\ &= \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du, \end{aligned}$$

ce qui montre la deuxième égalité.

Partie 2 - Question 7

Retrouver la formule de la constante d'Euler γ donnée en début de la partie 2 :

$$\int_0^\infty \ln(t) e^{-t} dt = -\gamma.$$

Solution

De la question 6, nous savons que :

$$\int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt = \ln(n) + \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du.$$

Or

$$\frac{(1-u)^n - 1}{u} = -\frac{(1-u)^n - 1}{(1-u) - 1} = -\sum_{k=0}^{n-1} (1-u)^k$$

et donc

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1-u)^k du \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \left[-\frac{(1-u)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ &= -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= -H_n. \end{aligned}$$

On déduit le résultat à partir du résultat obtenu de la partie 1.

Partie 3 - Question 8

Montrer que pour tout $s > 1$, $\zeta(s)$ est bien définie et vérifie

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^s} dt \leq \zeta(s) \leq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{t^s} dt.$$

En déduire un équivalent de $\zeta(s)$ lorsque $s \rightarrow 1^+$.

Solution

1. **Définition de $\zeta(s)$** La fonction zêta de Riemann est définie pour $s > 1$ par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

La série converge pour $s > 1$ car la somme partielle $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s}$ est dominée par une intégrale convergente (démontré ci-dessous).

2. **Encadrement par une intégrale** Pour $s > 1$, $\frac{1}{t^s}$ est décroissante, ce qui permet d'encadrer la somme par une intégrale (méthode des sommes de Riemann) :

$$\frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^s} dt \leq \frac{1}{n^s}.$$

En sommant sur n , on obtient :

$$\zeta(s) - 1 \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{t^s} dt \leq \zeta(s).$$

et

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^s} dt \leq \zeta(s) \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{t^s} dt.$$

3. **Calcul de l'intégrale** La primitive de $\frac{1}{t^s}$ pour $s > 1$ est donnée par :

$$\frac{t^{1-s}}{s-1}.$$

Ainsi, pour $t \in [1, \infty[$, l'intégrale devient :

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^s} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{(s-1)t^{s-1}} \right]_1^T = \frac{1}{s-1}.$$

4. **Encadrement de $\zeta(s)$** Substituons $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^s} dt = \frac{1}{s-1}$ dans l'encadrement de $\zeta(s)$:

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}.$$

5. **Équivalent lorsque $s \rightarrow 1^+$** Lorsque $s \rightarrow 1^+$, on remarque que la divergence de $\zeta(s)$ est dominée par le terme $\frac{1}{s-1}$, car $1 + \frac{1}{s-1}$ tend aussi vers ∞ . Par conséquent :

$$\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}, \quad \text{lorsque } s \rightarrow 1^+.$$

Partie 3 - Question 9

- (a) Montrer que, pour $s > 1$, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right)$$

converge.

- (b) En évaluant ses sommes partielles, montrer que sa somme vaut $\zeta(s)$.
 (c) En déduire la formule :

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{E(t)}{t^{s+1}} dt,$$

où $E(t)$ désigne la fonction partie entière.

Solution

(a) **Convergence de la série** Considérons le terme général de la série donnée :

$$a_n = n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right).$$

1. **Simplification du terme général** : En factorisant par $\frac{1}{n^s}$, on obtient :

$$a_n = n \cdot \frac{1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^s}{n^s}.$$

Or, $\left(\frac{n}{n+1}\right)^s = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^s$, et en développant au premier ordre avec le développement de Taylor :

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^s \approx 1 - \frac{s}{n+1}.$$

Ainsi :

$$1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \approx \frac{s}{n+1}.$$

2. **Comportement asymptotique** : Substituons cette approximation dans a_n :

$$a_n \approx n \cdot \frac{\frac{s}{n+1}}{n^s}.$$

Pour n grand, cela donne :

$$a_n \sim \frac{s}{n^s}.$$

Comme $s > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^s}$ converge. Par conséquent, la série donnée converge également.

(b) **Évaluation de la somme** Évaluons les sommes partielles :

$$S_N = \sum_{n=1}^N n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right).$$

1. **Réécriture** : Posons

$$A_N = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) = 1 - \frac{1}{(N+1)^s},$$

et $A_0 = 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N n(A_n - A_{n-1}) = \sum_{n=1}^N nA_n - \sum_{n=1}^N nA_{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^N nA_n - \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)A_n = - \sum_{n=1}^{N-1} A_n + NA_N \\ &= \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^s} - (N-1) + NA_N \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + N(A_N - 1) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} - \frac{N}{(N+1)^s} \end{aligned}$$

2. **Limite lorsque $N \rightarrow \infty$** : Lorsque $N \rightarrow \infty$, le terme $-\frac{N}{(N+1)^s}$ tend vers 0. Par conséquent :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \zeta(s).$$

(c) Formule intégrale Pour établir la formule intégrale, utilisons la fonction partie entière $E(t)$, définie comme le plus grand entier inférieur ou égal à t .

La somme partielle de la série peut être exprimée en termes de la fonction partie entière :

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{E(t)}{t^{s+1}} dt &= \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{E(t)}{t^{s+1}} dt = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{n}{t^{s+1}} dt \\ &= \sum_{n=1}^\infty n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) = \zeta(s).\end{aligned}$$

Partie 3 - Question 10

Démontrer que, pour tout entier $N \geq 2$, on a :

$$\int_1^N \frac{E(t) - t}{t^2} dt = H_N - \ln(N) - 1,$$

et en déduire la formule :

$$\int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^2} dt = \gamma - 1.$$

Solution

1. Analyse de l'intégrale L'intégrale donnée est :

$$I_N = \int_1^N \frac{E(t) - t}{t^2} dt,$$

où $E(t)$ est la fonction partie entière de t .

2. Décomposition de $E(t) - t$ Pour $t \in [n, n+1)$, où n est un entier, la fonction partie entière $E(t)$ est constante et égale à n . Ainsi :

$$E(t) - t = n - t.$$

Donc, l'intégrale sur $[n, n+1)$ devient :

$$\int_n^{n+1} \frac{E(t) - t}{t^2} dt = \int_n^{n+1} \frac{n - t}{t^2} dt.$$

3. Calcul de l'intégrale élémentaire Décomposons :

$$\int_n^{n+1} \frac{n - t}{t^2} dt = n \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt - \int_n^{n+1} \frac{t}{t^2} dt.$$

• **Premier terme :**

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_n^{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}.$$

• **Deuxième terme :**

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt = \ln(n+1) - \ln(n).$$

Substituons ces résultats dans l'intégrale :

$$\int_n^{n+1} \frac{n - t}{t^2} dt = n \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right) - (\ln(n+1) - \ln(n)).$$

Simplifions :

$$\int_n^{n+1} \frac{n - t}{t^2} dt = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n).$$

4. Somme de $[1, N]$ En sommant pour $n = 1$ à $N - 1$, l'intégrale devient :

$$\int_1^N \frac{E(t) - t}{t^2} dt = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \right).$$

- Les termes $\ln(n)$ se télescopent dans la somme, laissant $-\ln(N)$.
- La somme des termes $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ donne $H_N - 1$.

Ainsi :

$$\int_1^N \frac{E(t) - t}{t^2} dt = H_N - \ln(N) - 1.$$

5. Passage à la limite Lorsque $N \rightarrow \infty$, on a :

$$H_N - \ln(N) \rightarrow \gamma,$$

où γ est la constante d'Euler. Donc :

$$\int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^2} dt = \gamma - 1.$$

Partie 3 - Question 11

Justifier l'égalité :

$$\zeta(s) - \frac{s}{s-1} = s \int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^{s+1}} dt,$$

et conclure que :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1) \quad \text{lorsque } s \rightarrow 1^+.$$

Solution

1. Décomposition de $\zeta(s)$ Par définition, la fonction zêta est donnée par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

D'après la question précédente, on peut exprimer cette somme comme une intégrale :

$$\zeta(s) = \int_1^\infty \frac{E(t)}{t^{s+1}} dt,$$

où $E(t)$ est la fonction partie entière de t .

2. Substraction de $\frac{s}{s-1}$ En ajoutant et en soustrayant le terme intégral correspondant à $\frac{t}{t^{s+1}}$, on obtient :

$$\zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{E(t)}{t^{s+1}} dt = s \int_1^\infty \frac{t}{t^{s+1}} dt + s \int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^{s+1}} dt.$$

La première intégrale est simple à calculer :

$$\int_1^\infty \frac{t}{t^{s+1}} dt = \int_1^\infty \frac{1}{t^s} dt = \frac{1}{s-1}.$$

En substituant, nous avons :

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} + s \int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^{s+1}} dt,$$

ou encore

$$\zeta(s) - \frac{s}{s-1} = s \int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^{s+1}} dt.$$

3. Comportement asymptotique lorsque $s \rightarrow 1^+$ Lorsque $s \rightarrow 1^+$, on sait que :

$$\int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^{s+1}} dt \rightarrow \int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^2} dt = \gamma - 1.$$

Ainsi, pour $s \rightarrow 1^+$:

$$s \int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^{s+1}} dt \rightarrow (\gamma - 1).$$

En regroupant les termes, on trouve :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1), \quad \text{lorsque } s \rightarrow 1^+.$$

Conclusion

1. Nous avons montré que :

$$\zeta(s) - \frac{s}{s-1} = s \int_1^\infty \frac{E(t) - t}{t^{s+1}} dt.$$

2. Lorsque $s \rightarrow 1^+$, $\zeta(s)$ admet l'équivalent :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1).$$

Exercice 3. Sous-espaces de matrices nilpotentes.

Question 1

Montrer que T_n^+ , T_n^- et T_n^{++} sont des sous-espaces vectoriels (on pourra se contenter de rédiger les détails pour T_n^+) et préciser leur dimension.

Solution

1. T_n^+ est un sous-espace vectoriel

Un sous-ensemble W d'un espace vectoriel V est un sous-espace vectoriel si :

1. W est non vide.
2. W est stable par addition : si $A, B \in W$, alors $A + B \in W$.
3. W est stable par multiplication scalaire : si $A \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda A \in W$.

Pour T_n^+ , qui est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dans $M_n(\mathbb{R})$:

- **Non-vide** : La matrice nulle appartient à T_n^+ , donc $T_n^+ \neq \emptyset$.
- **Stabilité par addition** : Si $A, B \in T_n^+$, alors la somme $(A + B)$ est aussi une matrice triangulaire supérieure car les coefficients sous la diagonale restent nuls.
- **Stabilité par multiplication scalaire** : Si $A \in T_n^+$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λA est encore une matrice triangulaire supérieure car les coefficients sous la diagonale restent nuls.

Ainsi, T_n^+ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

2. Dimension de T_n^+

Les matrices triangulaires supérieures ont $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients non nuls (tous ceux situés sur ou au-dessus de la diagonale). Par conséquent, la dimension de T_n^+ est $\frac{n(n+1)}{2}$.

3. Dimension de T_n^-

De manière similaire, T_n^- (matrices triangulaires inférieures) a également $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients non nuls, donc la même dimension.

4. Dimension de T_n^{++}

Les matrices triangulaires strictement supérieures ont des zéros sur la diagonale et $\frac{n(n-1)}{2}$ coefficients non nuls (ceux au-dessus de la diagonale). Ainsi, la dimension de T_n^{++} est $\frac{n(n-1)}{2}$.

Question 2

Montrer que $T_n^- \oplus T_n^{++} = M_n(\mathbb{R})$.

Solution

Définition des ensembles

- T_n^- : Ensemble des matrices triangulaires inférieures.
- T_n^{++} : Ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes (n'ayant que des 0 sur la diagonale).
- $M_n(\mathbb{R})$: Ensemble de toutes les matrices $n \times n$ à coefficients réels.

L'objectif est de montrer que chaque matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ peut être exprimée comme la somme d'une matrice $B \in T_n^-$ et d'une matrice $C \in T_n^{++}$, c'est-à-dire :

$$A = B + C \quad \text{avec } B \in T_n^- \text{ et } C \in T_n^{++}.$$

Construction des matrices B et C

Soit une matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Construisons $B \in T_n^-$ et $C \in T_n^{++}$ de la manière suivante :

- Pour $B = (b_{ij}) \in T_n^-$ (triangulaire inférieure), définissons :

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \geq j, \\ 0 & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Ainsi, B contient les éléments de A situés sur ou sous la diagonale, avec des 0 au-dessus de la diagonale.

- Pour $C = (c_{ij}) \in T_n^{++}$ (triangulaire supérieure stricte), définissons :

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i < j, \\ 0 & \text{si } i \geq j. \end{cases}$$

Ainsi, C contient les éléments de A situés au-dessus de la diagonale, avec des 0 ailleurs.

Somme des matrices B et C

En sommant ces deux matrices, nous obtenons :

$$(B + C)_{ij} = \begin{cases} b_{ij} + c_{ij} = a_{ij} & \text{dans tous les cas,} \end{cases}$$

car les termes b_{ij} et c_{ij} sont complémentaires et couvrent exactement tous les coefficients de A .

Question 3

Pour $1 \leq k \leq n$, on note $E_k = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i \geq k, x_i = 0\}$. On note également $E_{n+1} = \mathbb{R}^n$. Soit $A \in T_n^{++}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .

- Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n+1$, on a $u(E_k) \subseteq E_{k-1}$.
- En déduire que A est nilpotente.
- Montrer que $T_n^{++} \subseteq N_n$, où N_n est l'ensemble des matrices nilpotentes.

Solution

(a) Montrons que $u(E_k) \subseteq E_{k-1}$

- Par définition de T_n^{++} , A est une matrice triangulaire supérieure stricte. Ainsi, A a des coefficients nuls sur et sous la diagonale, et les éléments non nuls se situent uniquement au-dessus de la diagonale.
- Considérons $x \in E_k$. Par définition, $x_i = 0$ pour tout $i \geq k$. En calculant $u(x) = Ax$, chaque composante $(u(x))_i$ de $u(x)$ est donnée par :

$$(u(x))_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,$$

où a_{ij} sont les coefficients de A . Étant donné que A est triangulaire stricte, $a_{ij} = 0$ si $j \leq i$. Si $i \geq k$, alors $x_j = 0$ pour $j \geq k$. Ainsi, pour $i \geq k-1$, on a $(u(x))_i = 0$.

- Par conséquent, $u(x) \in E_{k-1}$, car les seules composantes non nulles de $u(x)$ sont celles avec $i < k-1$.

(b) Montrons que A est nilpotente

- Soit $x \in \mathbb{R}^n$. En appliquant successivement u , on observe que les éléments non nuls de $u(x)$ “descendent” dans les indices à chaque itération, grâce à la propriété triangulaire stricte de A .
- En particulier, après au plus n applications de u , tout vecteur devient nul :

$$u^n(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

- Cela montre que u est nilpotent, et donc que A est nilpotente.

(c) Montrons que $T_n^+ \cap N_n = T_n^{++}$

- Par définition, N_n est l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{R})$. Nous avons montré en (b) que toute matrice $A \in T_n^{++}$ est nilpotente. Par conséquent, $T_n^{++} \subseteq N_n$. De plus $T_n^{++} \subseteq T_n^+$ et donc $T_n^{++} \subseteq T_n^+ \cap N_n$.
- Réciproquement, si $A \in T_n^+ \cap N_n$, alors il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure, dont les éléments sur la diagonale sont égaux aux produits des coefficients diagonaux. On déduit que si A est nilpotente, les éléments diagonaux sont nécessairement nuls et $A \in T_n^{++}$.
- $T_n^{++} \subseteq T_n^+ \cap N_n$ et $T_n^+ \cap N_n \subseteq T_n^{++}$, et donc $T_n^+ \cap N_n = T_n^{++}$.

Question 4

N_n est-il un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$?

Solution

Définitions

- N_n : Ensemble des matrices nilpotentes, c'est-à-dire les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe un entier $k \geq 1$ pour lequel $A^k = 0$.
- Sous-espace vectoriel : Un sous-ensemble W de $M_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel si :
 - W est non vide.
 - W est stable par addition : $A, B \in W \implies A + B \in W$.
 - W est stable par multiplication scalaire : $A \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda A \in W$.

Vérification des propriétés

1. N_n est non vide La matrice nulle 0 appartient à N_n , car $0^k = 0$ pour tout $k \geq 1$. Donc $N_n \neq \emptyset$.

2. Stabilité par multiplication scalaire Si $A \in N_n$, alors il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$. Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k = 0$. Donc, $\lambda A \in N_n$.

3. Stabilité par addition Considérons $A, B \in N_n$. Il existe $k_1, k_2 \geq 1$ tels que $A^{k_1} = 0$ et $B^{k_2} = 0$. Cependant, $(A + B)^k \neq 0$ en général, même si A et B sont nilpotentes. Prenons l'exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont nilpotentes car $A^2 = 0$ et $B^2 = 0$. Cependant :

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$. Donc, $A + B \notin N_n$.

Conclusion

N_n n'est pas un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, car il n'est pas stable par addition.

Question 5

Si $A \in N_n$, montrer que $\text{Tr}(A) = 0$. (Indication : on pourra étudier les valeurs propres complexes de A .)

Solution

Propriétés de la trace

- La trace d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, notée $\text{Tr}(A)$, est la somme de ses valeurs propres (y compris les valeurs propres complexes et leur multiplicité).
- Si A est nilpotente ($A^k = 0$ pour un certain $k \geq 1$), alors toutes les valeurs propres de A sont égales à zéro. Cela découle de la définition des valeurs propres.

Étape 1 : Rappel sur les valeurs propres

Une valeur propre λ de A satisfait l'équation caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

où I est la matrice identité. Si A est nilpotente, alors $A^k = 0$ pour un certain $k \geq 1$. Cela implique que toutes les valeurs propres λ de A satisfont $\lambda^k = 0$, donc $\lambda = 0$.

Étape 2 : La trace comme somme des valeurs propres

La trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

où λ_i sont les valeurs propres (réelles ou complexes) de A .

Puisque toutes les valeurs propres de A sont nulles ($\lambda_i = 0$ pour tout i), il en découle que :

$$\text{Tr}(A) = 0.$$

Question 6

Soient A et B dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A , B , et $A + B$ sont nilpotentes, alors $\text{Tr}(AB) = 0$.

Solution

Hypothèses

- $A^k = 0$ pour un certain $k \geq 1$: A est nilpotente.
- $B^m = 0$ pour un certain $m \geq 1$: B est nilpotente.
- $(A + B)^p = 0$ pour un certain $p \geq 1$: $A + B$ est nilpotente.

Nous devons montrer que $\text{Tr}(AB) = 0$. $A + B$ est nilpotent, donc aussi $(A + B)^2$. On a donc

$$0 = \text{Tr}((A + B)^2) = \text{Tr}(A^2) + \text{Tr}(AB + BA) + \text{Tr}(B^2) = 0 + 2\text{Tr}(AB) + 0$$

car $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Question 7

- Montrer que $\dim(V) = \dim(V \cap T_n^-) + \dim(\pi(V))$.
- En déduire que $\dim(V) = \dim(\tau(V \cap T_n^-)) + \dim(\pi(V))$.

Solution

(a) Montrons que $\dim(V) = \dim(V \cap T_n^-) + \dim(\pi(V))$

Hypothèses et définition

- V est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ contenu dans N_n , l'ensemble des matrices nilpotentes.
- T_n^- : Ensemble des matrices triangulaires inférieures.
- π est la projection de $M_n(\mathbb{R})$ sur T_n^{++} parallèlement à T_n^- .

Décomposition de V Toute matrice $M \in V$ peut s'écrire de manière unique comme une somme :

$$M = M_1 + M_2, \quad \text{avec } M_1 \in T_n^- \text{ et } M_2 \in T_n^{++}.$$

Par construction, $\pi(M) = M_2$ est l'image de M dans T_n^{++} . De plus, $M_1 = M - \pi(M) \in T_n^-$.

Interprétation dimensionnelle Les composantes $M_1 \in T_n^-$ et $M_2 \in T_n^{++}$ sont indépendantes. Ainsi, l'espace V se décompose en une somme directe :

$$V = (V \cap T_n^-) \oplus \pi(V).$$

Par la propriété classique des espaces vectoriels, on a alors :

$$\dim(V) = \dim(V \cap T_n^-) + \dim(\pi(V)).$$

(b) Montrons que $\dim(V) = \dim(\tau(V \cap T_n^-)) + \dim(\pi(V))$

Hypothèses et définition

- τ est l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par la transposition : $\tau(M) = M^\top$, où $M^\top$ est la transposée de M .

Application à $V \cap T_n^-$ L'application τ agit sur $V \cap T_n^-$ pour produire une image contenue dans T_n^{++} . En effet, la transposée d'une matrice triangulaire inférieure est triangulaire supérieure stricte.

Puisque τ est un isomorphisme entre T_n^- et T_n^{++} , la dimension de $\tau(V \cap T_n^-)$ est la même que celle de $V \cap T_n^-$. Ainsi :

$$\dim(V \cap T_n^-) = \dim(\tau(V \cap T_n^-)).$$

Conclusion En substituant dans le résultat de (a), on obtient :

$$\dim(V) = \dim(\tau(V \cap T_n^-)) + \dim(\pi(V)).$$

Question 8

Montrer que $\tau(V \cap T_n^-)$ est inclus dans T_n^{++} .

Solution

Hypothèses et définitions

- V est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ contenu dans N_n , l'ensemble des matrices nilpotentes.
- T_n^- est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.
- T_n^{++} est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes, c'est-à-dire ayant des 0 sur la diagonale.
- τ est l'endomorphisme de transposition : pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\tau(M) = M^\top$, où $M^\top$ est la transposée de M .

Propriété clé

La transposée d'une matrice triangulaire inférieure est une matrice triangulaire supérieure stricte si cette matrice appartient à $T_n^- \cap N_n$. Cela découle directement des définitions des ensembles.

Étape 1 : Inclusion de $V \cap T_n^-$ dans T_n^-

Par définition, $V \cap T_n^- \subseteq T_n^-$. Ainsi, toute matrice $A \in V \cap T_n^-$ est triangulaire inférieure.

Étape 2 : Transposée d'une matrice triangulaire inférieure

Si $A \in T_n^-$, alors $\tau(A) = A^\top$ est une matrice triangulaire supérieure. Si A est nilpotente (car $A \in V$), alors $A^\top$ est également nilpotente, car les valeurs propres d'une matrice et de sa transposée sont identiques.

De plus, comme A est nilpotente et triangulaire inférieure, les coefficients diagonaux de A sont nuls. Par conséquent, $A^\top$ est triangulaire supérieure stricte, c'est-à-dire $A^\top \in T_n^{++}$.

Étape 3 : Inclusion finale

Pour tout $A \in V \cap T_n^-$, on a $\tau(A) = A^\top \in T_n^{++}$. Par conséquent :

$$\tau(V \cap T_n^-) \subseteq T_n^{++}.$$

Question 9

Soit $A \in \tau(V \cap T_n^-) \cap \pi(V)$ et $N \in V$ tel que $A = \pi(N)$.

- Montrer que $A^\top + N \in V$ et en déduire que $\text{Tr}(A^\top N) = 0$.
- Montrer que $N - A \in T_n^-$ et en déduire que $A(N^\top - A^\top) \in T_n^{++}$.
- Montrer que $\text{Tr}(AA^\top) = 0$.
- Conclure que $A = 0$.

Solution

(a) Montrons que $A^\top + N \in V$ et déduisons que $\text{Tr}(A^\top N) = 0$

1. $A^\top + N \in V$:

- Par hypothèse, $N \in V$, et $A = \pi(N)$ implique que $A \in T_n^{++}$.
- Par définition de τ , $A^\top \in \tau(V \cap T_n^-) \subseteq T_n^{++}$.
- La somme $A^\top + N$ appartient à V car V est un sous-espace vectoriel : $N \in V$ et $A^\top \in \tau(V \cap T_n^-) \subseteq V$.

2. $\text{Tr}(A^\top N) = 0$:

- $A^\top N$ est une matrice résultant du produit d'une matrice triangulaire supérieure stricte ($A^\top$) avec une matrice nilpotente (N).
- Par une propriété des matrices nilpotentes et triangulaires strictes, les termes diagonaux de $A^\top N$ sont tous nuls. Ainsi, $\text{Tr}(A^\top N) = 0$.

(b) Montrons que $N - A \in T_n^-$ et $A(N^\top - A^\top) \in T_n^{++}$

1. $N - A \in T_n^-$:

- Par hypothèse, $N \in V$, donc $\pi(N) = A$. Cela signifie que $N - A$ est une composante de N dans T_n^- .
- Par construction, $\pi(N - A) = 0$, ce qui implique $N - A \in T_n^-$.

2. $A(N^\top - A^\top) \in T_n^{++}$:

- Par définition, $A \in T_n^{++}$ et $N - A \in T_n^-$.
- La matrice $N^\top - A^\top$ est triangulaire supérieure stricte car $N - A \in T_n^-$.
- Le produit $A(N^\top - A^\top)$ est une matrice triangulaire supérieure stricte, donc $A(N^\top - A^\top) \in T_n^{++}$.

(c) Montrons que $\text{Tr}(AA^\top) = 0$

D'après la question (b) précédente, $\text{Tr}(AN^\top) - \text{Tr}(AA^\top) = 0$. Or d'après la question (a), $\text{Tr}(AN^\top) = \text{Tr}(NA^\top) = \text{Tr}(A^\top N) = 0$. On en déduit que $\text{Tr}(AA^\top) = 0$.

(d) Concluons que $A = 0$

- Si $\text{Tr}(AA^\top) = 0$, cela implique que tous les termes de A sont nuls, car

$$\text{Tr}(AA^\top) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2.$$

- Par conséquent, $A = 0$.

Question 10 Théorème de Gerstenhaber

Énoncé : Soit V un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ constitué de matrices nilpotentes. Alors :

$$\dim(V) \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Solution

1. Résultats préliminaires obtenus

- **Question 7 :** $\dim(V) = \dim(\tau(V \cap T_n^-)) + \dim(\pi(V))$.
- **Question 8 :** $\tau(V \cap T_n^-)$ est inclus dans T_n^{++} .
- **Question 9 :** Si $A \in \tau(V \cap T_n^-) \cap \pi(V)$, alors $A = 0$.

Comme $\pi(V)$ est aussi inclus dans T_n^{++} , et que l'intersection avec $\tau(V \cap T_n^-)$ est réduite à 0, on déduit que

$$\dim(\tau(V \cap T_n^-)) + \dim(\pi(V)) \leq \dim(T_n^{++}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Par conséquent

$$\dim(V) \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

et le théorème de Gerstenhaber est démontré.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Éléments de correction

Partie 1 : Déterminant de Cauchy

Question 1

Montrer qu'il existe un nombre complexe λ tel que :

$$F(X) = \lambda \frac{(X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_{n-1})}{(X + b_1)(X + b_2) \cdots (X + b_n)}.$$

Solution

Étapes de résolution

1. Définition de $F(X)$:

$F(X)$ est la fraction rationnelle associée à une matrice de Cauchy augmentée :

$$F(X) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1} + b_n} \\ \frac{1}{X + b_1} & \cdots & \frac{1}{X + b_n} \end{vmatrix}.$$

2. Utilisation des propriétés des déterminants :

En développant par rapport à la dernière ligne, $F(X)$ est une combinaison linéaire des mineurs obtenus en supprimant successivement les colonnes associées à $\frac{1}{X + b_j}$. Ces mineurs ne dépendent que des termes $a_i + b_j$, où $i = 1, \dots, n - 1$.

3. Factorisation :

Le déterminant $F(X)$ est un polynôme en X au numérateur et au dénominateur. Les zéros au numérateur proviennent de $X = a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, car $F(X)$ s'annule lorsque X coïncide avec ces valeurs (chaque colonne devient dépendante d'une autre).

4. Structure de $F(X)$:

On peut alors écrire $F(X)$ comme suit :

$$F(X) = \lambda \frac{(X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_{n-1})}{(X + b_1)(X + b_2) \cdots (X + b_n)},$$

où λ est un facteur constant dépendant des valeurs a_i et b_j .

5. Conclusion :

Le facteur λ peut être déterminé explicitement en calculant le coefficient dominant de $F(X)$, mais l'énoncé demande simplement de prouver son existence, ce qui est établi grâce à la factorisation ci-dessus.

Question 2

On pose $G(X) = (X + b_n)F(X)$. Montrer que $G(-b_n) = D_{n-1}$ et en déduire une relation entre D_n et D_{n-1} .

Solution

On peut calculer $F(X)$ en développant par rapport à la dernière ligne. En multipliant par $(X + b_n)$, on obtient

$$G(X) = D_{n-1} + (X + b_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{X + b_i} \beta_i$$

où les β_i sont des constantes indépendantes de X . On en déduit que

$$G(-b_n) = D_{n-1}.$$

De plus, avec $F(X)$ exprimé précédemment :

$$F(X) = \lambda \frac{(X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_{n-1})}{(X + b_1)(X + b_2) \cdots (X + b_n)},$$

on obtient :

$$G(X) = \lambda \frac{(X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_{n-1})}{(X + b_1)(X + b_2) \cdots (X + b_{n-1})}.$$

Comme

$$F(a_n) = D_n = \lambda \frac{(a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1})}{(a_n + b_1)(a_n + b_2) \cdots (a_n + b_n)}$$

et en remplaçant X par $-b_n$ dans $G(X)$, on a :

$$G(-b_n) = \lambda \frac{((-b_n) - a_1)((-b_n) - a_2) \cdots ((-b_n) - a_{n-1})}{((-b_n) + b_1)((-b_n) + b_2) \cdots ((-b_n) + b_{n-1})} = D_{n-1}$$

et

$$\begin{aligned} D_n &= \lambda \frac{(a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1})}{(a_n + b_1)(a_n + b_2) \cdots (a_n + b_n)} \\ &= \frac{((-b_n) + b_1)((-b_n) + b_2) \cdots ((-b_n) + b_{n-1})}{((-b_n) - a_1)((-b_n) - a_2) \cdots ((-b_n) - a_{n-1})} \\ &\quad \times \frac{(a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1})}{(a_n + b_1)(a_n + b_2) \cdots (a_n + b_n)} D_{n-1} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n) \prod_{i=1}^{n-1} (b_i + a_n)} \frac{1}{(a_n + b_n)} D_{n-1}. \end{aligned}$$

Question 3

Conclure que :

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)},$$

dans le cas où les a_i et b_i sont distincts, puis dans le cas général.

Solution

Etapas de la solution

1. Relation de récurrence

D'après la question 2, on a montré que :

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n) \prod_{i=1}^{n-1} (b_i + a_n)} \frac{1}{(a_n + b_n)} D_{n-1}.$$

2. Cas de base ($n = 1$)

Pour $n = 1$, la matrice est de taille 1×1 avec un seul terme $\frac{1}{a_1 + b_1}$. Le déterminant est directement :

$$D_1 = \frac{1}{a_1 + b_1}.$$

3. Hypothèse de récurrence

Supposons que pour $n - 1$, la formule suivante est vraie :

$$D_{n-1} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n-1} (a_i + b_j)}.$$

Alors

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n) \prod_{i=1}^{n-1} (b_i + a_n)} \frac{1}{(a_n + b_n)} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n-1} (a_i + b_j)} \\ &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}, \end{aligned}$$

et l'hypothèse est vraie pour n . Par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

Si les a_i ou b_i ne sont pas distincts, alors des termes comme $a_j - a_i$ ou $b_j - b_i$ deviennent nuls dans le numérateur. Cela rend $D_n = 0$, ce qui est cohérent avec le fait qu'une matrice de Cauchy avec des lignes ou colonnes identiques est singulière.

Conclusion

La formule finale est donc :

$$D_n = \begin{cases} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)} & \text{si les } a_i \text{ et } b_i \text{ sont distincts,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie 2 : Matrices de Gram

Question 4

Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base orthonormale de V et M la matrice de taille $m \times n$ définie par

$$M = (\langle e_i | x_j \rangle)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

1. Montrer que $\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = M^T M$.

2. Montrer que $\text{rg}(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n)) = \dim V$.
3. Montrer que toute valeur propre réelle de $M^\top M$ est positive ou nulle.
4. En déduire que $\det(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n)) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée.

Solution

1. Expression de la matrice de Gram

La matrice de Gram est définie comme :

$$\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i | x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Utilisant la base orthonormale $(e_1, \dots, e_m)$ de V , chaque vecteur x_j s'écrit dans cette base comme :

$$x_j = \sum_{i=1}^m \langle e_i | x_j \rangle e_i.$$

En notant M la matrice $m \times n$ dont les coefficients sont $M_{ij} = \langle e_i | x_j \rangle$, on peut donc écrire :

$$\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = M^\top M.$$

2. Rang de la matrice de Gram

Le rang de la matrice M correspond au nombre de vecteurs $x_1, \dots, x_n$ linéairement indépendants dans V , car M est construite à partir des coordonnées des x_j dans la base $(e_1, \dots, e_m)$.

Ainsi, $\text{rg}(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(M)$, ce qui est égal à la dimension de V , soit :

$$\text{rg}(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n)) = \dim V.$$

3. Valeurs propres de $M^\top M$

Le produit $M^\top M$ est une matrice symétrique positive semi-définie. Cela signifie que :

1. Toutes les valeurs propres de $M^\top M$ sont réelles (car $M^\top M$ est symétrique).
2. Toute valeur propre λ de $M^\top M$ satisfait $\lambda \geq 0$.

Ceci provient de la propriété que, pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$:

$$u^\top (M^\top M) u = (Mu)^\top (Mu) = \|Mu\|^2 \geq 0.$$

En particulier si u est un vecteur propre de $M^\top M$ associé à la valeur propre λ , on obtient

$$u^\top (M^\top M) u = \lambda u^\top u = \lambda \|u\|^2 = \|Mu\|^2.$$

4. Déterminant de la matrice de Gram

Le déterminant de la matrice de Gram est donné par le produit des valeurs propres de $M^\top M$. Puisque toutes les valeurs propres sont positives ou nulles, on a :

$$\det(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n)) \geq 0.$$

De plus, $\det(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n)) = 0$ si et seulement si $\text{Gram}(x_1, \dots, x_n)$ est singulière, ce qui se produit lorsque $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille linéairement dépendante.

Question 5

On suppose que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre. Soit $x \in E$ et $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur $V = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Montrer que :

$$d(x, V) = \sqrt{\frac{\det(\text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n))}{\det(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n))}},$$

où $d(x, V)$ désigne la distance de x au sous-espace V .

Solution

1. Distance et projection orthogonale

La distance d'un vecteur $x \in E$ au sous-espace V est donnée par :

$$d(x, V) = \|x - p(x)\|,$$

où $p(x)$ est le projeté orthogonal de x sur V .

Par définition, $p(x)$ est l'unique vecteur de V tel que :

$$\langle x - p(x) | v \rangle = 0, \quad \forall v \in V.$$

Si $p(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, alors les coefficients λ_i sont déterminés par :

$$\langle x - p(x) | x_j \rangle = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

2. Système linéaire pour les coefficients de $p(x)$

En substituant $p(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, on obtient :

$$x - p(x) = x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

L'orthogonalité impose :

$$\langle x | x_j \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x_i | x_j \rangle, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Cela donne un système linéaire de n équations pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Sous forme matricielle :

$$\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x | x_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x | x_n \rangle \end{pmatrix}.$$

3. Distance $\|x - p(x)\|^2$

En utilisant $x = p(x) + (x - p(x))$, et le fait que $x - p(x)$ est orthogonal à V , on a :

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2,$$

ou encore

$$\|x - p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p(x)\|^2.$$

4. Matrices de Gram étendues

La matrice de Gram étendue $\text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n)$ est donnée par :

$$\text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x|x \rangle & \langle x|x_1 \rangle & \dots & \langle x|x_n \rangle \\ \langle x_1|x \rangle & \langle x_1|x_1 \rangle & \dots & \langle x_1|x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n|x \rangle & \langle x_n|x_1 \rangle & \dots & \langle x_n|x_n \rangle \end{pmatrix}.$$

On peut de plus écrire, car $x - p(x)$ est orthogonal à V ,

$$\begin{aligned} & \text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n) \\ = & \begin{pmatrix} \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2 & \langle p(x)|x_1 \rangle & \dots & \langle p(x)|x_n \rangle \\ \langle x_1|p(x) \rangle & \langle x_1|x_1 \rangle & \dots & \langle x_1|x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n|p(x) \rangle & \langle x_n|x_1 \rangle & \dots & \langle x_n|x_n \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le $\det(\text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n))$ se calcule par exemple en développant par rapport à la première colonne. On obtient alors

$$\begin{aligned} & \det(\text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n)) \\ = & \det(\text{Gram}(p(x), x_1, \dots, x_n)) \\ & + \det \begin{pmatrix} \|x - p(x)\|^2 & \langle p(x)|x_1 \rangle & \dots & \langle p(x)|x_n \rangle \\ 0 & \langle x_1|x_1 \rangle & \dots & \langle x_1|x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle x_n|x_1 \rangle & \dots & \langle x_n|x_n \rangle \end{pmatrix} \\ = & \|x - p(x)\|^2 \det(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

En effet, comme $(p(x), x_1, \dots, x_n)$ forme une famille liée, on a

$$\det(\text{Gram}(p(x), x_1, \dots, x_n)) = 0.$$

Nous avons donc établi que :

$$d(x, V) = \sqrt{\frac{\det(\text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n))}{\det(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n))}}.$$

Cette formule relie la distance d'un vecteur à un sous-espace aux déterminants des matrices de Gram.

Partie 3 : Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass

Question 6

Montrer que le module de continuité ω est un nombre réel bien défini et qu'il vérifie :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0,$$

où $\omega(\delta)$ est défini par :

$$\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [0, 1], |x - y| \leq \delta\}.$$

Solution

1. Définition de $\omega(\delta)$

Le module de continuité $\omega(\delta)$ est une borne supérieure prise sur les différences des valeurs de f pour des points $x, y \in [0, 1]$ tels que $|x - y| \leq \delta$.

- **Bornes de $\omega(\delta)$** : f étant continue sur le compact $[0, 1]$, elle est uniformément continue. Cela signifie qu'il existe un contrôle uniforme sur $|f(x) - f(y)|$ pour $|x - y| \leq \delta$. Par continuité de f , $\omega(\delta)$ est un nombre réel (fini).
- **Croissance de $\omega(\delta)$** : Lorsque δ augmente, la condition $|x - y| \leq \delta$ devient moins restrictive. Ainsi, $\omega(\delta)$ est croissante :

$$\omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2) \quad \text{si } \delta_1 \leq \delta_2.$$

2. Limite $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta)$

- **Comportement pour $\delta \rightarrow 0$** : Pour $\delta = 0$, on impose $x = y$, ce qui donne $|f(x) - f(y)| = 0$. Ainsi, $\omega(0) = 0$.
- **Uniformité de la continuité** : Pour $\delta > 0$, la continuité de f assure que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que si $|x - y| \leq \delta_0$, alors $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Cela implique que :

$$\omega(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \delta \rightarrow 0.$$

3. Conclusion

- $\omega(\delta)$ est bien défini car f est continue sur un compact, assurant que $|f(x) - f(y)|$ est borné pour $|x - y| \leq \delta$.
- $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0$ découle de la continuité de f , qui impose que les variations de f tendent vers 0 lorsque x et y deviennent arbitrairement proches.

Question 7

Montrer que, pour tout $n \geq 0$, la famille $\{B_{n,k}\}_{0 \leq k \leq n}$ est une base de l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n , noté P_n .

Solution

1. Définition des polynômes de Bernstein

Les polynômes de Bernstein sont définis par :

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad x \in [0, 1].$$

Ces polynômes sont de degré n . Ainsi, chaque $B_{n,k}(x)$ appartient à P_n , l'espace des polynômes de degré au plus n .

2. Vérification de la linéarité

L'espace P_n est un espace vectoriel de dimension $n+1$, avec comme base canonique $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$. Pour prouver que $\{B_{n,k}\}_{k=0}^n$ est une base de P_n , il faut montrer qu'elle :

1. génère P_n ,
2. est une famille libre.

3. Génération de P_n

Pour tout $p(x) \in P_n$, il existe une combinaison linéaire des $B_{n,k}$ telle que :

$$p(x) = \sum_{k=0}^n c_k B_{n,k}(x),$$

où $c_k \in \mathbb{R}$. Cela découle du fait que chaque $B_{n,k}(x)$ est une combinaison de monômes x^i (pour $0 \leq i \leq n$), et que $\{1, x, \dots, x^n\}$ est une base de P_n .

4. Indépendance linéaire

Supposons une combinaison linéaire nulle :

$$\sum_{k=0}^n c_k B_{n,k}(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

En développant $B_{n,k}(x)$, cela devient :

$$\sum_{k=0}^n c_k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Evaluons ce polynôme à des points spécifiques :

- $x = 0$: Seul $B_{n,0}(x)$ est non nul, donc $c_0 = 0$.
- $x = 1$: Seul $B_{n,n}(x)$ est non nul, donc $c_n = 0$.

En divisant par $x(1-x)$ et par induction, on montre que tous les $c_k = 0$. Ainsi, la famille $\{B_{n,k}\}_{k=0}^n$ est libre.

La famille $\{B_{n,k}\}_{k=0}^n$ génère P_n , et est linéairement indépendante. Par conséquent, $\{B_{n,k}\}_{k=0}^n$ est une base de P_n .

Question 8

Montrer que $B_n(f)$ est un polynôme de degré n , que l'on exprimera en fonction des $B_{n,k}$.

Solution

1. Définition de $B_n(f)$

Pour $f \in C([0, 1])$, le polynôme de Bernstein associé est défini par :

$$B_n(f)(x) = \mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right],$$

où $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, et X_i sont des variables de Bernoulli indépendantes de paramètre x (c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_i = 1) = x$ et $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - x$).

2. Calcul de $\mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right]$

La variable S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$, donc :

$$\mathbb{P} \left(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n} \right) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

L'espérance $B_n(f)(x)$ s'écrit donc :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

3. Expression en fonction des $B_{n,k}$

Rappelons que les polynômes de Bernstein $B_{n,k}$ sont définis par :

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Substituons cette définition dans $B_n(f)(x)$:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x).$$

Ainsi, $B_n(f)(x)$ est une combinaison linéaire des $B_{n,k}(x)$, avec les coefficients $f\left(\frac{k}{n}\right)$.

4. Degré du polynôme $B_n(f)$

Chaque $B_{n,k}(x)$ est un polynôme de degré n . Une somme finie de polynômes de degré n est elle-même un polynôme de degré au plus n . Donc $B_n(f)(x)$ est un polynôme de degré n .

Question 9

Montrer que :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right),$$

puis que :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

Solution

1. Décomposition de l'erreur $|B_n(f)(x) - f(x)|$

On commence par écrire $B_n(f)(x)$:

$$B_n(f)(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right],$$

où S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$.

L'erreur $|B_n(f)(x) - f(x)|$ est donnée par :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| = \left| \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right] \right|$$

et donc

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right].$$

2. Partition des cas selon $\left|\frac{S_n}{n} - x\right|$

Introduisons un seuil $\delta > 0$ pour distinguer deux cas :

1. Lorsque $\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq \delta$,
2. Lorsque $\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta$.

On décompose :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right] &= \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \cdot \mathbf{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq \delta\right\}}\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \cdot \mathbf{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right\}}\right]. \end{aligned}$$

3. Premier terme ($\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq \delta$)

Lorsque $\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq \delta$, la définition du module de continuité $\omega(\delta)$ donne :

$$\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \leq \omega(\delta).$$

Ainsi :

$$\mathbb{E} \left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \cdot \mathbf{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq \delta\right\}} \right] \leq \omega(\delta).$$

4. Deuxième terme ($\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta$)

Lorsque $\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta$, on majore $\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|$ par $2\|f\|_\infty$:

$$\mathbb{E} \left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \cdot \mathbf{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right\}} \right] \leq 2\|f\|_\infty \cdot \mathbb{P} \left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta \right).$$

5. Probabilité $\mathbb{P} \left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta \right)$

La variable $\frac{S_n}{n}$ suit une loi binomiale centrée réduite avec moyenne x et variance $\frac{x(1-x)}{n}$. En appliquant l'inégalité de Chebyshev, on obtient :

$$\mathbb{P} \left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta \right) \leq \frac{\text{Var} \left(\frac{S_n}{n} \right)}{\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2}.$$

Comme $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$\mathbb{P} \left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta \right) \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

6. Résultat final

En combinant les deux termes :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \cdot \frac{1}{4n\delta^2}.$$

En simplifiant le second terme :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

Question 10

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe un polynôme $T_n(f)$ tel que :

$$\|f - T_n(f)\|_\infty = d(f, P_n),$$

où $d(f, P_n)$ est la distance entre f et l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n , mesurée avec la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Solution

1. Distance à un sous-espace de dimension finie

L'espace P_n des polynômes de degré inférieur à n est un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'espace $C([a, b])$, muni de la norme infinie :

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|.$$

La distance $d(f, P_n)$ est définie comme :

$$d(f, P_n) = \inf_{p \in P_n} \|f - p\|_\infty.$$

La compacité de $[a, b]$ garantit que $\|f - p\|_\infty$ atteint une borne inférieure, car $\|f - p\|_\infty$ est une fonction continue de p , définie sur le sous-espace compact P_n .

2. Existence de $T_n(f)$

La propriété ci-dessus garantit l'existence d'un polynôme $T_n(f) \in P_n$ tel que :

$$\|f - T_n(f)\|_\infty = \inf_{p \in P_n} \|f - p\|_\infty = d(f, P_n).$$

En d'autres termes, $T_n(f)$ est le polynôme minimisant la distance entre f et P_n pour la norme infinie. Cette existence repose sur les propriétés suivantes :

1. **Compacité** : L'ensemble des polynômes de degré $\leq n$, noté P_n , est compact lorsqu'il est restreint à $C([a, b])$.
2. **Continuité de $\|f - p\|_\infty$** : Cette norme est une fonction continue de p dans l'espace vectoriel normé.

Question 11

Montrer que si $f \in C([a, b])$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f) - f\|_\infty = 0,$$

Solution

On se ramène sur le segment $[0, 1]$ par translation et homothétie. De plus, par définition

$$\|T_n(f) - f\|_\infty \leq \|B_n(f) - f\|_\infty.$$

Par la question 9,

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

A δ fixé, on fait tendre n vers l'infini, pour déduire

$$\limsup_{n \geq 1} \|B_n(f) - f\|_\infty \leq \omega(\delta)$$

puis on fait tendre δ vers 0 pour conclure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(f) - f\|_\infty = 0,$$

et enfin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f) - f\|_\infty = 0.$$

Question 12

Montrer que si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne, alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{C}{n^{1/3}}.$$

Solution

1. Définition de la condition lipschitzienne

La fonction f est dite lipschitzienne s'il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [0, 1].$$

On en déduit que le module de continuité satisfait $\omega(\delta) \leq L\delta$.

2. Décomposition de l'erreur $\|B_n(f) - f\|_\infty$

Par la question 9,

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2} \leq L\delta + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

3. Résultat final

En prenant $\delta = \delta_n = n^{-1/3}$, on déduit l'existence d'une constante positive C telle que :

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{C}{n^{1/3}}.$$

Question 13

(a) Montrer qu'il existe un polynôme pair T_n tel que :

$$d(V, P_n) = \|V - T_n\|_\infty.$$

(b) En minorant $|T_n - T_n(0) - V|$ près de $x = 0$, montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $d(V, P_n) \geq cn^{-4}$.

Solution

On considère la fonction $V(x) = |x|$ et l'inégalité des frères Markov (1890) :

$$\|P'\|_\infty \leq n^2 \|P\|_\infty,$$

où P est un polynôme de degré au plus n et $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme infinie sur $[-1, 1]$.

(a) Existence d'un polynôme pair T_n

Pour toute approximation T_n de $V(x) = |x|$ dans l'espace des polynômes pairs de degré $\leq n$, on cherche à minimiser la distance :

$$d(V, P_n) = \inf_{P \in P_n} \|V - P\|_\infty.$$

Symétrie de V et T_n

- La fonction $V(x) = |x|$ est paire : $V(-x) = V(x)$.
- Toute approximation optimale T_n de V doit être paire, car si T_n n'est pas pair, on peut la remplacer par le polynôme $\tilde{T}_n(x)$ pair :

$$= \frac{T_n(x) + T_n(-x)}{2},$$

qui satisfera $\|V - \tilde{T}_n\|_\infty \leq \|V - T_n\|_\infty$.

(b) Minoration de $\|T_n - T_n(0) - V\|_\infty$ près de $x = 0$ **Approximation locale autour de $x = 0$**

- La fonction $V(x) = |x|$ est non différentiable en $x = 0$.
- Le polynôme $T_n(x)$ est différentiable partout. En particulier, $T'_n(0) = 0$ car T_n est pair.
- On considère la différence $T_n(x) - T_n(0) - V(x)$ près de $x = 0$. Pour $x > 0$, on a :

$$V(x) - T_n(x) \sim |x| - T_n(0) - T'_n(0)x - \frac{1}{2}T''_n(0)x^2.$$

Puisque $T'_n(0) = 0$, cette différence est dominée par un terme quadratique.

Minoration locale

Sur un voisinage $|x| \leq \frac{1}{n^2}$, on peut approximer $T_n(x)$ comme un polynôme quadratique, et on obtient :

$$|V(x) - T_n(x)| \gtrsim \frac{|x|}{n^4}.$$

Pour $x \approx 0$, la contribution quadratique domine, et on a une borne inférieure sur $\|T_n - V\|_\infty$.

Résultat final

En prenant en compte cette approximation locale et en utilisant la norme infinie sur $[-1, 1]$, on obtient :

$$d(V, P_n) \geq cn^{-4},$$

où $c > 0$ est une constante.

Partie 4 : Théorème de Müntz**Question 11 : Norme et produit scalaire associés à $\|\cdot\|_2$**

Pour $f \in C([0, 1])$, on pose :

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Vérifier que $\|\cdot\|_2$ est une norme associée à un produit scalaire que l'on explicitera et que l'on pourra noter $\langle \cdot | \cdot \rangle$ dans la suite.

Solution

Pour $f \in C([0, 1])$, on définit la norme $\|\cdot\|_2$ par :

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

(a) Vérification que $\|\cdot\|_2$ est une norme

Pour montrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme, on doit vérifier les trois propriétés suivantes :

1. **Positivité** : $\|f\|_2 \geq 0$ et $\|f\|_2 = 0 \iff f = 0$.
2. **Homogénéité** : Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \cdot \|f\|_2$.
3. **Inégalité triangulaire** : $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$.

1. Positivité

Par définition,

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

L'intégrale $\int_0^1 |f(t)|^2 dt \geq 0$ car $|f(t)|^2 \geq 0$ pour tout t . Si $\|f\|_2 = 0$, alors $\int_0^1 |f(t)|^2 dt = 0$, ce qui implique que $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$.

2. Homogénéité

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\|\alpha f\|_2 = \left(\int_0^1 |\alpha f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

En factorisant $|\alpha|^2$ dans l'intégrale :

$$\|\alpha f\|_2 = \left(|\alpha|^2 \int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = |\alpha| \cdot \|f\|_2.$$

3. Inégalité triangulaire

Pour $f, g \in C([0, 1])$, on a :

$$\|f + g\|_2^2 = \int_0^1 |f(t) + g(t)|^2 dt.$$

En développant $|f(t) + g(t)|^2$, on obtient :

$$|f(t) + g(t)|^2 = |f(t)|^2 + |g(t)|^2 + 2f(t)g(t).$$

En intégrant, cela donne :

$$\|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2 \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_0^1 f(t)g(t) dt \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2,$$

on en déduit que :

$$\|f + g\|_2^2 \leq (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2.$$

Ainsi :

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2.$$

(b) Produit scalaire associé

La norme $\|\cdot\|_2$ est associée au produit scalaire suivant :

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Les propriétés suivantes du produit scalaire sont faciles à vérifier :

1. **Linéarité** : Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g, h \in C([0, 1])$,

$$\langle \alpha f + \beta g|h \rangle = \alpha \langle f|h \rangle + \beta \langle g|h \rangle.$$

2. **Symétrie** : $\langle f|g \rangle = \langle g|f \rangle$.

3. **Positivité** : $\langle f|f \rangle \geq 0$ et $\langle f|f \rangle = 0 \iff f = 0$.

La norme $\|\cdot\|_2$ est liée au produit scalaire par :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f|f \rangle}.$$

Conclusion

1. La norme $\|\cdot\|_2$ est bien une norme sur $C([0, 1])$. 2. Elle est associée au produit scalaire :

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Question 12

Montrer que l'espace vectoriel :

$$\text{Vect}(\{x^m \mid m \in \mathbb{N}\})$$

est dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_2)$, où la norme $\|\cdot\|_2$ est donnée par :

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Solution

1. Densité dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$

Le théorème d'approximation de Weierstrass affirme que les polynômes sont denses dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$. Cela signifie que pour toute fonction $f \in C([0, 1])$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme $P(x) = \sum_{m=0}^n c_m x^m$ tel que :

$$\|f - P\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - P(x)| < \epsilon.$$

2. Relation entre $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$

Pour toute fonction $f \in C([0, 1])$, la norme $\|\cdot\|_2$ est liée à $\|\cdot\|_\infty$ par :

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \|f\|_\infty \cdot \sqrt{\int_0^1 1 dt} = \|f\|_\infty.$$

Cela montre que si une suite de polynômes (P_n) converge uniformément vers f , alors elle converge également en norme $\|\cdot\|_2$, car :

$$\|f - P_n\|_2 \leq \|f - P_n\|_\infty.$$

3. Approximation en norme $\|\cdot\|_2$

Soit $f \in C([0, 1])$ et $\epsilon > 0$. Par le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme $P(x) = \sum_{m=0}^n c_m x^m$ tel que :

$$\|f - P\|_\infty < \epsilon.$$

Puisque $\|f - P\|_2 \leq \|f - P\|_\infty$, on obtient :

$$\|f - P\|_2 < \epsilon.$$

Cela prouve que pour toute fonction $f \in C([0, 1])$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme $P(x) \in \text{Vect}(\{x^m\})$ tel que $\|f - P\|_2 < \epsilon$.

Question 13

On considère une suite $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ avec $\lambda_n \geq 0$ pour tout n . Montrer que la famille de fonctions $\{x^{\lambda_n}\}_{n \geq 0}$ est libre dans $C([0, 1])$. Cela signifie que si :

$$\sum_{n=0}^N c_n x^{\lambda_n} = 0, \quad \forall x \in [0, 1],$$

alors $c_n = 0$ pour tout n .

Solution

Considérons une combinaison linéaire finie de fonctions de la forme x^{λ_n} :

$$\sum_{n=0}^N c_n x^{\lambda_n} = 0, \quad \forall x \in [0, 1],$$

où $(c_n)_{n=0}^N \in \mathbb{R}^{N+1}$. Nous devons montrer que cette égalité implique $c_n = 0$ pour tout n .

En prenant la limite en 0, nous obtenons que c_0 est égal à 0 à partir de la limite en 0. Ensuite il suffit de diviser par x^{λ_1} pour $x \in]0, 1]$ et de prendre la limite en 0 pour obtenir $c_1 = 0$, et d'itérer jusqu'à c_N .

Question 14

Soit $V_N = \text{Vect}\{x^{\lambda_n} \mid 0 \leq n \leq N\}$ et m un réel positif. On étudie la distance entre x^m et V_N dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_2)$, où la norme $\|\cdot\|_2$ est définie par :

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

(a) Formule pour $d_2(x^m, V_N)$

La distance au carré entre x^m et V_N est donnée par :

$$d_2^2(x^m, V_N) = \inf_{P \in V_N} \|x^m - P\|_2^2.$$

Par orthogonalité, la projection optimale de x^m sur V_N minimise la norme. Étant donné que la suite (λ_n) est strictement croissante, la famille $(x^{\lambda_0}, \dots, x^{\lambda_N})$ est une base de V_N et on peut donc utiliser les résultats de la Partie 2. Calculons donc les matrices de Gram intervenant dans le calcul :

$$\text{Gram}(x^m, x^{\lambda_0}, \dots, x^{\lambda_N}) = \begin{pmatrix} \langle x^m | x^m \rangle & \langle x^m | x^{\lambda_0} \rangle & \dots & \langle x^m | x^{\lambda_N} \rangle \\ \langle x^{\lambda_0} | x^m \rangle & \langle x^{\lambda_0} | x^{\lambda_0} \rangle & \dots & \langle x^{\lambda_0} | x^{\lambda_N} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x^{\lambda_N} | x^m \rangle & \langle x^{\lambda_N} | x^{\lambda_0} \rangle & \dots & \langle x^{\lambda_N} | x^{\lambda_N} \rangle \end{pmatrix}.$$

et

$$\text{Gram}(x^{\lambda_0}, \dots, x^{\lambda_N}) = \begin{pmatrix} \langle x^{\lambda_0} | x^{\lambda_0} \rangle & \dots & \langle x^{\lambda_0} | x^{\lambda_N} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x^{\lambda_N} | x^{\lambda_0} \rangle & \dots & \langle x^{\lambda_N} | x^{\lambda_N} \rangle \end{pmatrix}.$$

Nous avons établi que :

$$d_2(x^m, V_N) = \sqrt{\frac{\det(\text{Gram}(x^m, x^{\lambda_0}, \dots, x^{\lambda_N}))}{\det(\text{Gram}(x^{\lambda_0}, \dots, x^{\lambda_N}))}}.$$

Après calculs, cela conduit à l'expression de $d_2(x^m, V_N)$ comme :

$$d_2(x^m, V_N) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{i=0}^N \frac{|m - \lambda_i|}{|m + \lambda_i + 1|}.$$

(b) Cas où (λ_n) est bornée

Si (λ_n) est bornée, elle est convergente car croissante vers λ_∞ . De plus, quand $i \rightarrow \infty$

$$\frac{|m - \lambda_i|}{|m + \lambda_i + 1|} \rightarrow \frac{|m - \lambda_\infty|}{|m + \lambda_\infty + 1|} < 1.$$

On peut donc conclure, en passant au logarithme, que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_2(x^m, V_N) = 0.$$

(c) Cas où (λ_n) est non-bornée

Si (λ_n) est non-bornée et si $m \notin \{\lambda_n \mid n \geq 0\}$, on veut montrer que $d_2(x^m, V_N) \rightarrow 0$ si et seulement si :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \text{ diverge.}$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_n > m$ pour tout $n \geq N_0$. On a alors, pour n grand,

$$u_n := \ln \left(\frac{\lambda_n - m}{m + \lambda_n + 1} \right) \sim -\frac{2m+1}{m + \lambda_n + 1} \sim -\frac{2m+1}{\lambda_n}.$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge vers $-\infty$, $d_2(x^m, V_N) \rightarrow 0$ et réciproquement.

Question 15

Soit $V = \text{Vect}\{x^{\lambda_n} \mid n \geq 0\}$ dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_2)$. Montrer que V est dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_2)$ si et seulement si :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$$

diverge.

Solution

1. Densité et approximation

Pour que V soit dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_2)$, il faut que pour toute fonction $f \in C([0, 1])$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une combinaison finie de la forme :

$$P(x) = \sum_{n=0}^N c_n x^{\lambda_n},$$

telle que :

$$\|f - P\|_2 < \epsilon,$$

où la norme $\|\cdot\|_2$ est donnée par :

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

2. Condition nécessaire et suffisante sur $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$

(a) Condition nécessaire : Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ converge, alors V n'est pas dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_2)$.

- Lorsque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$, cela signifie que la famille $\{x^{\lambda_n}\}$ ne peut pas fournir suffisamment d'“information” pour approximer toutes les fonctions $f \in C([0, 1])$ en norme $\|\cdot\|_2$.
- En particulier, la convergence de la série limite l'étendue des fonctions pouvant être construites par des combinaisons linéaires des x^{λ_n} .

Ainsi, si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ converge, V n'est pas dense.

(b) Condition suffisante : Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge, alors V est dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_2)$.

- Lorsque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, les x^{λ_n} couvrent une gamme suffisamment large d'exposants pour permettre une approximation arbitrairement précise de toute fonction $f \in C([0, 1])$.
- Ce résultat découle directement de la question 14.

Question 16

Soit $V = \text{Vect}\{x^{\lambda_n} \mid n \geq 0\}$ dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_{\infty})$, où la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ est définie par :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Montrer que si V est dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_{\infty})$, alors la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$$

diverge.

Solution

La densité de V dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_{\infty})$ signifie que pour toute fonction $f \in C([0, 1])$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une combinaison finie de la forme :

$$P(x) = \sum_{n=0}^N c_n x^{\lambda_n},$$

telle que :

$$\|f - P\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - P(x)| < \epsilon.$$

Mais

$$\|f - P\|_2 \leq \|f - P\|_{\infty},$$

ce qui implique que V est dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_2)$ et que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = \infty$ d'après la question précédente.

Question 17

(a) Prouver l'inégalité pour $\|f - g\|_\infty$

Montrer que si f et g sont des fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$, alors :

$$\|f - g\|_\infty \leq |f(0) - g(0)| + \|f' - g'\|_2.$$

Preuve

1. Par définition, la norme $\|\cdot\|_\infty$ est donnée par :

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|.$$

2. Puisque f et g sont de classe C^1 , par le théorème fondamental du calcul différentiel, on peut écrire pour tout $t \in [0, 1]$:

$$f(t) - g(t) = (f(0) - g(0)) + \int_0^t (f'(s) - g'(s)) ds.$$

3. En prenant la valeur absolue et en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|f(t) - g(t)| \leq |f(0) - g(0)| + \left| \int_0^t (f'(s) - g'(s)) ds \right|.$$

4. Par la borne supérieure de l'intégrale et l'inégalité de Jensen

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t (f'(s) - g'(s)) ds \right| &\leq \int_0^t |f'(s) - g'(s)| ds \leq \sqrt{\int_0^t |f'(s) - g'(s)|^2 ds} \\ &\leq \sqrt{\int_0^1 |f'(s) - g'(s)|^2 ds} = \|f' - g'\|_2. \end{aligned}$$

5. Comme $t \in [0, 1]$, on a $t \leq 1$, donc :

$$|f(t) - g(t)| \leq |f(0) - g(0)| + \|f' - g'\|_2.$$

En prenant le supremum sur $t \in [0, 1]$, on obtient l'inégalité finale :

$$\|f - g\|_\infty \leq |f(0) - g(0)| + \|f' - g'\|_2.$$

(b) Conclure que si $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n}$ diverge, alors V est dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$

1. L'inégalité (a) montre que pour approximer une fonction $f \in C([0, 1])$ en norme $\|\cdot\|_\infty$, il suffit d'approcher :

- $f(0)$ avec x^0 en $x = 0$,
- $f'(t)$ par des combinaisons linéaires des dérivées x^{λ_n} sur $[0, 1]$.

2. Si $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, la question 16 garantit que $\{x^{\lambda_n}\}$ est dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$. Cela signifie qu'on peut approximer $f(0)$ et $f'(t)$ à volonté par des éléments de V .

3. Conclusion : Si $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, alors $V = \text{Vect}\{x^{\lambda_n}\}$ est dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.

(c) Le théorème de Müntz reste-t-il valable si l'on omet l'hypothèse $\lambda_0 = 0$?

1. **Rôle de $\lambda_0 = 0$:** - L'hypothèse $\lambda_0 = 0$ garantit que la famille $\{x^{\lambda_n}\}$ contient la constante $x^0 = 1$. - La fonction constante 1 est essentielle pour approximer les termes constants dans une fonction continue sur $[0, 1]$.

2. **Conséquence si $\lambda_0 \neq 0$:** - Si $\lambda_0 > 0$, alors $1 \notin V$, et la famille $\{x^{\lambda_n}\}$ ne peut pas approximer toutes les fonctions continues sur $[0, 1]$. - Cela rend le théorème de Müntz invalide dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, car V ne sera pas dense.

3. **Conclusion :** Le théorème de Müntz n'est pas valide si l'on omet l'hypothèse $\lambda_0 = 0$, car $1 \notin V$ empêcherait d'approcher toutes les fonctions continues.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve à option (B) : Probabilités

Éléments de correction

Problème de la ruine du joueur

Question 1

Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $S_{i,k}^A(1)$? Même question pour la variable aléatoire $S_{i,k}^A(2)$.

Solution

Analyse des valeurs prises par les variables aléatoires

1. Variable aléatoire $S_{i,k}^A(1)$

- **Définition** : $S_{i,k}^A(1)$ représente le montant dont dispose le joueur A après le *premier lancer* de la pièce.
- **Initialisation** : Le joueur A commence avec i euros.
- **Résultats possibles** :
 - Si la pièce tombe sur “face” (probabilité p), A gagne 1 euro : $S_{i,k}^A(1) = i + 1$.
 - Si la pièce tombe sur “pile” (probabilité $1 - p$), A perd 1 euro : $S_{i,k}^A(1) = i - 1$.
- **Valeurs prises** : $S_{i,k}^A(1) \in \{i - 1, i + 1\}$.

2. Variable aléatoire $S_{i,k}^A(2)$

- **Définition** : $S_{i,k}^A(2)$ représente le montant dont dispose le joueur A après *deux lancers* de la pièce.
- **Etapas possibles** :
 - **Premier lancer** : $S_{i,k}^A(1) = i + 1$ ou $S_{i,k}^A(1) = i - 1$.
 - **Deuxième lancer** :
 - * Si $S_{i,k}^A(1) = i + 1$, alors :
 - Si la pièce tombe sur “face” : $S_{i,k}^A(2) = i + 2$.
 - Si la pièce tombe sur “pile” : $S_{i,k}^A(2) = i$.
 - * Si $S_{i,k}^A(1) = i - 1$, alors :

- Si la pièce tombe sur “face” : $S_{i,k}^A(2) = i$.
- Si la pièce tombe sur “pile” : $S_{i,k}^A(2) = i - 2$.

- **Valeurs prises** : $S_{i,k}^A(2) \in \{i - 2, i, i + 2\}$.

Question 2

Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_{i,k}^A(2)$.

Solution

Détermination de la loi de $S_{i,k}^A(2)$

1. Rappels des valeurs possibles

Après deux lancers de la pièce, la variable aléatoire $S_{i,k}^A(2)$ peut prendre les valeurs suivantes :

$$S_{i,k}^A(2) \in \{i - 2, i, i + 2\}.$$

2. Cas possibles et probabilités associées

- **Cas 1** : $S_{i,k}^A(2) = i + 2$
Ce cas se produit si la pièce tombe deux fois sur “ face ”.
Probabilité : $P(S_{i,k}^A(2) = i + 2) = p^2$.
- **Cas 2** : $S_{i,k}^A(2) = i$
Ce cas se produit si :
 - La pièce tombe une fois sur “ face ” puis une fois sur “ pile ”.
 - La pièce tombe une fois sur “ pile ” puis une fois sur “ face ”.

Probabilité :

$$P(S_{i,k}^A(2) = i) = p(1 - p) + (1 - p)p = 2p(1 - p).$$

- **Cas 3** : $S_{i,k}^A(2) = i - 2$
Ce cas se produit si la pièce tombe deux fois sur “ pile ”.
Probabilité : $P(S_{i,k}^A(2) = i - 2) = (1 - p)^2$.

3. Loi de $S_{i,k}^A(2)$

La variable $S_{i,k}^A(2)$ suit une loi discrète donnée par :

$$P(S_{i,k}^A(2) = x) = \begin{cases} p^2 & \text{si } x = i + 2, \\ 2p(1 - p) & \text{si } x = i, \\ (1 - p)^2 & \text{si } x = i - 2. \end{cases}$$

Question 3

Dans le cas où $p = 1/2$, quelle est l'espérance de $S_{i,k}^A(2)$?

Solution

Espérance de $S_{i,k}^A(2)$ pour $p = \frac{1}{2}$

1. Rappel des valeurs possibles de $S_{i,k}^A(2)$

Les valeurs possibles de $S_{i,k}^A(2)$ sont :

$$S_{i,k}^A(2) \in \{i-2, i, i+2\}.$$

2. Probabilités associées pour $p = \frac{1}{2}$

Lorsque la pièce est équilibrée ($p = \frac{1}{2}$), les probabilités associées sont :

- $P(S_{i,k}^A(2) = i+2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,
- $P(S_{i,k}^A(2) = i) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,
- $P(S_{i,k}^A(2) = i-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

3. Calcul de l'espérance

L'espérance est donnée par la formule :

$$\mathbb{E}[S_{i,k}^A(2)] = \sum_x x \cdot P(S_{i,k}^A(2) = x),$$

où x parcourt les valeurs possibles de $S_{i,k}^A(2)$.

Substituons les valeurs et les probabilités :

$$\mathbb{E}[S_{i,k}^A(2)] = (i+2) \cdot \frac{1}{4} + i \cdot \frac{1}{2} + (i-2) \cdot \frac{1}{4} = i.$$

Question 4

Quelle est la valeur de la probabilité $w_{0,k}^A$ (i.e., la probabilité que le joueur A gagne s'il dispose de 0 euro en début de partie) ?

Solution

Si le joueur A commence avec 0 euro :

- Il est déjà ruiné au début de la partie.
- Par définition, lorsqu'un joueur est ruiné, il ne peut plus participer au jeu et perd automatiquement.

Ainsi, la probabilité que A gagne la partie dans cette situation est :

$$w_A^{0,k} = 0.$$

Question 5

Quelle est la valeur de la probabilité $w_{k,k}^A$?

Solution

Si le joueur A commence avec k euros :

- Cela signifie que le joueur B commence avec 0 euro.
- Dans ce cas, B est déjà ruiné dès le début de la partie.
- Par conséquent, A a déjà gagné la partie.

La probabilité que A gagne la partie dans cette situation est donc :

$$w_A^{k,k} = 1.$$

Questions 6 à 9 : Cas $i = 2, k = 3$

6. Calculer la probabilité pour que $\tau_{2,3}^A$ soit égal à 1.
7. Expliquer pourquoi $S_{2,3}^A(\tau_{2,3}^A) = 3$ si et seulement si $\tau_{2,3}^A$ est impair.
8. Montrer par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$P(\tau_{2,3}^A = 2m + 1) = p^{m+1}(1-p)^m.$$

9. En déduire l'expression (en fonction de p) de $w_{2,3}^A$. Vous vérifierez que lorsque $p = 1/2$, le joueur A a 2 chances sur 3 de remporter le jeu.

Question 6 : Probabilité que $\tau_{2,3}^A = 1$

- $\tau_{2,3}^A = 1$ signifie que la ruine pour B se produit après le premier lancer.
- Pour que A gagne immédiatement ($S_{2,3}^A(1) = 3$), la pièce doit tomber sur " face " avec probabilité p .

La probabilité totale est donc :

$$P(\tau_{2,3}^A = 1) = p.$$

Question 7 : Pourquoi $S_{2,3}^A(\tau_{2,3}^A) = 3$ si et seulement si $\tau_{2,3}^A$ est impair ?

- $S_{2,3}^A(\tau_{2,3}^A) = 3$ signifie que A gagne la partie.
- Pour atteindre 3 à partir de $S_{2,3}^A(0) = 2$, A doit gagner un nombre impair de fois car les transitions entre i et $i + 1$ alternent.
- De manière similaire, A atteint $S_{2,3}^A = 0$ (ruine) uniquement après un nombre pair de lancers.

Donc, $S_{2,3}^A(\tau_{2,3}^A) = 3$ si et seulement si $\tau_{2,3}^A$ est impair.

Question 8 : Montrer que $P(\tau_{2,3}^A = 2m + 1) = p^{m+1}(1-p)^m$

Hypothèse initiale ($m = 0$) : Pour $m = 0$, c'est la question - :

$$P(\tau_{2,3}^A = 1) = p = p^{0+1}(1-p)^0.$$

Hérédité ($m \rightarrow m+1$) : Si c'est vrai au rang m , la probabilité qu'il ait 2 chances au bout de $2m$ lancers est de

$$p^m(1-p)^m,$$

et donc

$$\mathbb{P}(\tau_{2,3}^A = 2(m+1) + 1) = p^{m+1}(1-p)^{m+1} \times p = p^{m+2}(1-p)^{m+1}.$$

La formule est démontrée par récurrence.

Question 9 : Expression de $w_A^{2,3}$

$w_{2,3}^A$ est la probabilité que A gagne, soit $S_{2,3}^A(\tau_{2,3}^A) = 3$. D'après la question 8 : $w_{2,3}^A = \sum_{m=0}^{\infty} P(\tau_{2,3}^A = 2m+1)$. En substituant :

$$\begin{aligned} w_{2,3}^A &= \sum_{m=0}^{\infty} p^{m+1}(1-p)^m \\ &= p \sum_{m=0}^{\infty} (p(1-p))^m. \end{aligned}$$

La série géométrique converge pour $|p(1-p)| < 1$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}, \quad x = p(1-p).$$

Donc :

$$w_{2,3}^A = p \cdot \frac{1}{1-p(1-p)} = p \cdot \frac{1}{p^2 + (1-p)^2}.$$

Si $p = \frac{1}{2}$ (pièce équilibrée) :

$$w_{2,3}^A = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi, A a deux chances sur trois de gagner.

Question 10

Pour tout $i \geq 2$, donner l'expression de la fonction $g(i, r) > 0$ pour laquelle :

$$a_{i,r} - a_{0,r} = g(i, r)(a_{1,r} - a_{0,r}).$$

Solution

Détermination de $g(i, r)$

1. Relation de récurrence donnée

On considère la relation suivante pour $r > 0$ et tout $i \geq 1$:

$$a_{i+1,r} - a_{i,r} = r \cdot (a_{i,r} - a_{i-1,r}).$$

En posant $b_i = a_{i,r} - a_{i-1,r}$, la relation devient :

$$b_{i+1} = r \cdot b_i.$$

2. Solution explicite pour b_i

La récurrence $b_{i+1} = r \cdot b_i$ est une progression géométrique, donc :

$$b_i = b_1 \cdot r^{i-1},$$

où $b_1 = a_{1,r} - a_{0,r}$.

3. Expression pour $a_{i,r} - a_{0,r}$

En utilisant $b_i = a_{i,r} - a_{i-1,r}$, on a :

$$a_{i,r} - a_{0,r} = \sum_{j=1}^i b_j.$$

Substituons $b_j = b_1 \cdot r^{j-1}$ dans la somme :

$$a_{i,r} - a_{0,r} = \sum_{j=1}^i b_1 \cdot r^{j-1}.$$

Factorisons b_1 et utilisons la formule de la somme d'une série géométrique :

$$a_{i,r} - a_{0,r} = b_1 \cdot \sum_{j=1}^i r^{j-1} = b_1 \cdot \frac{1-r^i}{1-r}, \quad \text{si } r \neq 1.$$

4. Définition de $g(i, r)$

Par définition, $g(i, r)$ est donné par :

$$g(i, r) = \frac{a_{i,r} - a_{0,r}}{a_{1,r} - a_{0,r}}.$$

Substituons $a_{i,r} - a_{0,r} = b_1 \cdot \frac{1-r^i}{1-r}$ et $a_{1,r} - a_{0,r} = b_1$:

$$g(i, r) = \frac{b_1 \cdot \frac{1-r^i}{1-r}}{b_1} = \frac{1-r^i}{1-r}.$$

5. Résultat final

$$g(i, r) = \frac{1-r^i}{1-r}, \quad \text{si } r \neq 1.$$

6. Cas particulier : $r = 1$

Si $r = 1$, la progression géométrique devient une somme arithmétique, et on obtient :

$$a_{i,r} - a_{0,r} = i \cdot b_1,$$

donc :

$$g(i, r) = i.$$

Question 11

Montrer que :

$$a_{1,r} = \frac{a_{n,r} - a_{0,r}}{g(n, r)} + a_{0,r}.$$

Solution

D'après la question précédente, nous savons que :

$$a_{n,r} - a_{0,r} = g(n, r) \cdot (a_{1,r} - a_{0,r}),$$

où $g(n, r)$ est donné par :

$$g(n, r) = \begin{cases} \frac{1-r^n}{1-r}, & \text{si } r \neq 1, \\ n, & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

En réarrangeant l'équation, nous obtenons :

$$a_{1,r} - a_{0,r} = \frac{a_{n,r} - a_{0,r}}{g(n, r)}.$$

En ajoutant $a_{0,r}$ des deux côtés de l'équation, on obtient :

$$a_{1,r} = \frac{a_{n,r} - a_{0,r}}{g(n, r)} + a_{0,r}.$$

La formule demandée est donc démontrée :

$$a_{1,r} = \frac{a_{n,r} - a_{0,r}}{g(n, r)} + a_{0,r}.$$

Question 12

Justifier la relation de récurrence :

$$w_{i,k}^A = p w_{i+1,k}^A + (1-p) w_{i-1,k}^A, \quad \text{pour tout } i \geq 1.$$

Solution

On a

$$\begin{aligned} w_{i,k}^A &= \mathbb{P}\left(S_{i,k}^A(\tau_{i,k}^A) = k \mid 1^{ier} \text{ lancer} = \text{"pile"}\right) p \\ &\quad + \mathbb{P}\left(S_{i,k}^A(\tau_{i,k}^A) = k \mid 1^{ier} \text{ lancer} = \text{"face"}\right) (1-p). \end{aligned}$$

Donc

$$w_{i,k}^A = p w_{i+1,k}^A + (1-p) w_{i-1,k}^A.$$

Question 13

Donner l'expression (en fonction de p, k, i) de la probabilité $w_{i,k}^A$.

Solution

Expression de $w_{i,k}^A$ en fonction de p, k , et i

1. Relation de récurrence

D'après la question précédente, la relation de récurrence pour $w_{i,k}^A$ est donnée par :

$$w_{i,k}^A = p w_{i+1,k}^A + (1-p) w_{i-1,k}^A, \quad \text{pour tout } i \geq 1.$$

Avec les conditions aux limites :

$$w_{0,k}^A = 0, \quad w_{k,k}^A = 1.$$

On obtient alors

$$w_{i+1,k}^A - w_{i,k}^A = \frac{(1-p)}{p} (w_{i,k}^A - w_{i-1,k}^A).$$

2. Cas général : $p \neq \frac{1}{2}$

Pour $p \neq \frac{1}{2}$, posons $r = \frac{1-p}{p}$. D'après les questions 4, 5 et 11, on obtient :

$$w_{i,k}^A = \frac{1-r^i}{1-r^k}.$$

Cherchons une solution sous la forme :

3. Cas particulier : $p = \frac{1}{2}$

Lorsque $p = \frac{1}{2}$, $r = 1$. La solution précédente n'est pas directement applicable. L'équation de récurrence devient :

$$w_{i,k}^A = \frac{1}{2} \cdot w_{i+1,k}^A + \frac{1}{2} \cdot w_{i-2,k}^A.$$

La solution est alors linéaire :

$$w_{i,k}^A = \frac{i}{k}.$$

Question 14

Vérifier que le résultat ci-dessus coïncide lorsque $i = 2$ et $k = 3$ à la réponse donnée à la question 9. Vous pourrez dans un premier temps montrer que pour tout $p \in]0, 1[\setminus \{1/2\}$:

$$\frac{p^3 - (1-p)^3}{p^2 - (1-p)^2} = 1 - p(1-p).$$

Solution

Vérification de l'égalité

La question demande de vérifier que l'expression générale de $w_A^{i,k}$ obtenue en question 13 coïncide avec le résultat spécifique pour $i = 2$, $k = 3$, et $p \neq \frac{1}{2}$:

$$\frac{p^3 - (1-p)^3}{p^2 - (1-p)^2} = \frac{1 - (1-p)^2}{1 - (1-p)^3}.$$

1. Rappel de l'expression de $w_A^{i,k}$

L'expression générale de $w_{i,k}^A$ pour $p \neq \frac{1}{2}$ est :

$$w_{i,k}^A = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k}.$$

Pour $i = 2$ et $k = 3$, cela devient :

$$w_{i,k}^A = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^3}.$$

2. Développement de $w_A^{2,3}$

Développons explicitement :

$$w_{i,k}^A = \frac{1 - \frac{(1-p)^2}{p^2}}{1 - \frac{(1-p)^3}{p^3}}.$$

Réécrivons en termes d'un dénominateur commun :

$$w_{i,k}^A = \frac{\frac{p^2 - (1-p)^2}{p^2}}{\frac{p^3 - (1-p)^3}{p^3}}.$$

Simplifions davantage :

$$w_{i,k}^A = \frac{p^3 \cdot (p^2 - (1-p)^2)}{p^2 \cdot (p^3 - (1-p)^3)}.$$

Ce qui donne :

$$w_{i,k}^A = \frac{p \cdot (p^2 - (1-p)^2)}{p^3 - (1-p)^3} = \frac{p}{1 - p(1-p)}.$$

Question 15

Quelle est la première ligne de la matrice de transition $\mathbf{P}$? La dernière ligne?

Solution

Première ligne et dernière ligne de la matrice de transition $\mathbf{P}$

La matrice de transition $\mathbf{P}$ est une matrice stochastique décrivant les transitions possibles entre les différents états de la marche aléatoire. Chaque état i représente le nombre d'euros que le joueur A possède, avec :

- 0 correspondant à la ruine de A ,
- k correspondant à la ruine de B .

1. Structure de la matrice $\mathbf{P}$

Pour tout $1 \leq i \leq k-1$, les transitions sont définies par :

$$\mathbf{P}_{i,i-1} = 1-p, \quad \mathbf{P}_{i,i+1} = p, \quad \mathbf{P}_{i,i} = 0.$$

Les conditions aux bords sont les suivantes :

- Si $i = 0$ (ruine de A) :

$$\mathbf{P}_{0,0} = 1, \quad \mathbf{P}_{0,j} = 0 \quad \text{pour } j \neq 0.$$

- Si $i = k$ (ruine de B) :

$$\mathbf{P}_{k,k} = 1, \quad \mathbf{P}_{k,j} = 0 \quad \text{pour } j \neq k.$$

2. Première ligne de $\mathbf{P}$

La première ligne correspond à $i = 0$ (ruine de A). Dans cet état, A ne peut plus jouer, donc :

$$\mathbf{P}_0 = [1, 0, 0, \dots, 0].$$

3. Dernière ligne de $\mathbf{P}$

La dernière ligne correspond à $i = k$ (ruine de B). Dans cet état, B ne peut plus jouer, donc :

$$\mathbf{P}_k = [0, 0, 0, \dots, 1].$$

4. Résultat final

La matrice $\mathbf{P}$ a les propriétés suivantes pour ses premières et dernières lignes :

- Première ligne ($i = 0$) :

$$\mathbf{P}(0) = [1, 0, 0, \dots, 0].$$

- Dernière ligne ($i = k$) :

$$\mathbf{P}(k) = [0, 0, 0, \dots, 1].$$

Question 16

Pour tout $u \in \{2, \dots, k\}$, donner les expressions, en fonction de p , de $\mathbf{P}_{u,u-1}$, $\mathbf{P}_{u,u+1}$ et $\mathbf{P}_{u,v}$ pour tout $v \notin \{u-1, u+1\}$.

Solution

Expressions des probabilités de transition $\mathbf{P}_{u,v}$

La matrice $\mathbf{P}$ est une matrice de transition stochastique décrivant les probabilités de passer d'un état u à un autre état v lors d'une étape de la marche aléatoire. Pour un état $u \in \{2, \dots, k-1\}$, les transitions possibles sont :

- Vers $u-1$: la pièce tombe sur "pile" ($1-p$),
- Vers $u+1$: la pièce tombe sur "face" (p),
- Vers tout autre état $v \notin \{u-1, u+1\}$: cela est impossible dans ce modèle.

Expressions des probabilités

- Probabilité de transition vers $u-1$:

$$\mathbf{P}_{u,u-1} = 1-p.$$

- Probabilité de transition vers $u+1$:

$$\mathbf{P}_{u,u+1} = p.$$

- Probabilité de transition vers tout autre état $v \notin \{u-1, u+1\}$:

$$\mathbf{P}_{u,v} = 0, \quad \text{pour tout } v \notin \{u-1, u+1\}.$$

Question 17

La matrice $\mathbf{P}$ est-elle une matrice stochastique? Justifier votre réponse.

Solution

1. Rappel des propriétés d'une matrice stochastique

Une matrice est dite **stochastique** si :

1. Tous ses éléments sont positifs ou nuls ($\mathbf{P}_{i,j} \geq 0$ pour tout i, j),
2. La somme des éléments de chaque ligne est égale à 1, c'est-à-dire :

$$\sum_j \mathbf{P}_{i,j} = 1 \quad \text{pour tout } i.$$

2. Structure de la matrice $\mathbf{P}$

La matrice $\mathbf{P}$ représente les transitions d'une marche aléatoire. Chaque ligne de $\mathbf{P}$ correspond aux transitions possibles depuis un état donné i . En fonction de i , nous avons les cas suivants :

Première ligne ($i = 0$) :

- Si A est ruiné, il reste dans cet état :

$$\mathbf{P}_{0,0} = 1, \quad \mathbf{P}_{0,j} = 0 \text{ pour } j \neq 0.$$

- Somme des éléments de la ligne :

$$\sum_j \mathbf{P}_{0,j} = 1.$$

Dernière ligne ($i = k$) :

- Si B est ruiné, A reste dans cet état :

$$\mathbf{P}_{k,k} = 1, \quad \mathbf{P}_{k,j} = 0 \text{ pour } j \neq k.$$

- Somme des éléments de la ligne :

$$\sum_j \mathbf{P}_{k,j} = 1.$$

Lignes intermédiaires ($1 \leq i \leq k-1$) :

- Les transitions possibles sont :

$$\mathbf{P}_{i,i-1} = 1 - p, \quad \mathbf{P}_{i,i+1} = p, \quad \mathbf{P}_{i,j} = 0 \text{ pour tout autre } j.$$

- Somme des éléments de la ligne :

$$\sum_j \mathbf{P}_{i,j} = \mathbf{P}_{i,i-1} + \mathbf{P}_{i,i+1} = (1 - p) + p = 1.$$

3. Vérification des propriétés

Positivité des éléments :

- Tous les éléments de $\mathbf{P}$ sont ≥ 0 :

$$\mathbf{P}_{i,i-1} = 1 - p \geq 0 \text{ (car } 0 \leq p \leq 1),$$

$$\mathbf{P}_{i,i+1} = p \geq 0,$$

Les autres éléments sont 0.

Somme des lignes :

- La somme des éléments de chaque ligne est égale à 1, comme montré ci-dessus.

4. Conclusion

La matrice $\mathbf{P}$ est une matrice **stochastique**, car elle satisfait les deux propriétés nécessaires :

Question 18

Pour tout couple $(r, s) \in \{0, \dots, k\}^2$, donner l'expression de la probabilité $P(S_{i,k}^A(\ell + 2) = s \mid S_{i,k}^A(\ell) = r)$, $\ell \in \mathbb{N}$.

Solution**Probabilité de transition en deux étapes**

Nous devons exprimer la probabilité suivante :

$$P\left(S_{i,k}^A(\ell + 2) = s \mid S_{i,k}^A(\ell) = r\right),$$

en fonction des probabilités $\mathbf{P}_{r,t}$ et $\mathbf{P}_{t,s}$ avec $t \in \{0, \dots, k\}$.

1. Rappel de la probabilité de transition en deux étapes

Pour une chaîne de Markov, la probabilité de transition en deux étapes est donnée par :

$$P\left(S_{i,k}^A(\ell + 2) = s \mid S_{i,k}^A(\ell) = r\right) = \sum_{t=0}^k \mathbf{P}_{r,t} \cdot \mathbf{P}_{t,s}.$$

Ici :

- $\mathbf{P}_{r,t}$ est la probabilité de passer de l'état r à l'état t en une étape.
- $\mathbf{P}_{t,s}$ est la probabilité de passer de l'état t à l'état s en une étape.

2. Formule finale

En utilisant la règle de probabilité de transition sur deux étapes, nous avons :

$$P\left(S_{i,k}^A(\ell + 2) = s \mid S_{i,k}^A(\ell) = r\right) = \sum_{t=0}^k \mathbf{P}_{r,t} \cdot \mathbf{P}_{t,s}.$$

3. Interprétation

- L'état intermédiaire t correspond à tous les états possibles où le système peut être après une étape depuis r .
- Chaque t contribue à la probabilité totale en fonction des probabilités $\mathbf{P}_{r,t}$ et $\mathbf{P}_{t,s}$.
- La probabilité totale prend en compte toutes les transitions possibles via les états intermédiaires t .

4. Résultat final

La probabilité de passer de r à s en deux étapes est donnée par :

$$P\left(S_{i,k}^A(\ell + 2) = s \mid S_{i,k}^A(\ell) = r\right) = \sum_{t=0}^k \mathbf{P}_{r,t} \cdot \mathbf{P}_{t,s}.$$

Question 19

Expliciter la probabilité donnée par l'élément $\mathbf{P}_{u,v}^2$ de la ligne u et de la colonne v de la matrice $\mathbf{P}^2$. Plus généralement, pour $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, que représente l'élément $\mathbf{P}_{u,v}^m$?

Solution

Calcul de $\mathbf{P}_{u,v}^2$ et interprétation de $\mathbf{P}_{u,v}^m$

1. Probabilité donnée par l'élément $\mathbf{P}_{u,v}^2$

L'élément $\mathbf{P}_{u,v}^2$ de la matrice $\mathbf{P}^2$ correspond à la probabilité de passer de l'état u à l'état v en **deux étapes**. Selon la définition des puissances d'une matrice de transition, cette probabilité est donnée par :

$$\mathbf{P}_{u,v}^2 = P\left(S_{i,k}^A(\ell+2) = v-1 \mid S_{i,k}^A(\ell) = v-1\right) = \sum_{t=0}^k \mathbf{P}_{u,t} \cdot \mathbf{P}_{t,v},$$

où :

- $\mathbf{P}_{u,t}$ est la probabilité de passer de u à un état intermédiaire t en une étape,
- $\mathbf{P}_{t,v}$ est la probabilité de passer de t à v en une étape.

Ainsi, $\mathbf{P}_{u,v}^2$ est obtenu en sommant, pour tous les états intermédiaires t , les contributions des probabilités de transition via t .

2. Interprétation de $\mathbf{P}_{u,v}^m$ pour $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

De manière générale, l'élément $\mathbf{P}_{u,v}^m$ représente la probabilité de passer de l'état u à l'état v en **exactement** m **étapes**. Cette probabilité est calculée à partir des puissances de la matrice de transition $\mathbf{P}$, en utilisant la relation :

$$\mathbf{P}_{u,v}^m = P\left(S_{i,k}^A(\ell+m) = v-1 \mid S_{i,k}^A(\ell) = v-1\right) = \sum_{t_1, t_2, \dots, t_{m-1}} \mathbf{P}_{u,t_1} \cdot \mathbf{P}_{t_1,t_2} \cdots \mathbf{P}_{t_{m-1},v}.$$

Ici :

- $t_1, t_2, \dots, t_{m-1}$ représentent les états intermédiaires successifs visités entre u et v ,
- La somme est effectuée sur tous les chemins possibles passant par ces états intermédiaires.

3. Résumé des résultats

- Pour $m = 2$:

$$\mathbf{P}_{u,v}^2 = \sum_{t=0}^k \mathbf{P}_{u,t} \cdot \mathbf{P}_{t,v}.$$

- Pour $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$\mathbf{P}_{u,v}^m$ représente la probabilité de passer de l'état u à l'état v en exactement m étapes.

Question 20

La matrice $\mathbf{P}^m$ est-elle une matrice stochastique ? Justifier votre réponse.

Solution

La matrice $\mathbf{P}^m$ est-elle une matrice stochastique?

1. Rappel : Propriétés d'une matrice stochastique

Une matrice est dite **stochastique** si :

1. Tous ses éléments sont positifs ou nuls ($\mathbf{P}_{u,v}^m \geq 0$ pour tout u, v),
2. La somme des éléments de chaque ligne est égale à 1, c'est-à-dire :

$$\sum_v \mathbf{P}_{u,v}^m = 1 \quad \text{pour tout } u.$$

2. Analyse de la matrice $\mathbf{P}^m$

La matrice $\mathbf{P}^m$ représente les probabilités de transition en exactement m étapes. Elle est obtenue par le produit matriciel :

$$\mathbf{P}^m = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \cdot \dots \cdot \mathbf{P} \quad (m \text{ fois}).$$

Nous analysons les deux propriétés nécessaires pour déterminer si $\mathbf{P}^m$ est stochastique.

1. Positivité des éléments :

- La matrice $\mathbf{P}$ est stochastique, donc tous ses éléments $\mathbf{P}_{u,v} \geq 0$.
- Lorsqu'on multiplie des matrices de transition, les éléments résultants $\mathbf{P}_{u,v}^m$ sont des sommes pondérées de produits d'éléments de $\mathbf{P}$, donc $\mathbf{P}_{u,v}^m \geq 0$.
- Par conséquent, tous les éléments de $\mathbf{P}^m$ sont non négatifs.

2. Somme des lignes :

- Dans une chaîne de Markov, la somme des probabilités de transition à partir d'un état u doit être égale à 1, quel que soit le nombre d'étapes.
- Pour $\mathbf{P}$, la somme des lignes est 1. Lorsqu'on élève $\mathbf{P}$ à la puissance m , les propriétés de multiplication matricielle garantissent que la somme des lignes de $\mathbf{P}^m$ reste égale à 1, car la probabilité totale de transition depuis un état donné est conservée.

3. Conclusion

La matrice $\mathbf{P}^m$ est une matrice **stochastique**, car elle satisfait les deux propriétés nécessaires :

1. Tous ses éléments sont positifs ou nuls ($\mathbf{P}_{u,v}^m \geq 0$),
2. La somme des éléments de chaque ligne est égale à 1 ($\sum_v \mathbf{P}_{u,v}^m = 1$ pour tout u).

Question 21

Comment interprétez-vous les éléments de la $(k+1)$ -ième colonne de la matrice limite $\mathbf{Q}$ obtenue lorsque $m \rightarrow \infty$? Justifier votre réponse.

Solution

Interprétation de la $(k + 1)$ -ième colonne de $\mathbf{Q}$

1. Convergence de $\mathbf{P}^m$ vers $\mathbf{Q}$

Lorsque $m \rightarrow \infty$, la matrice $\mathbf{P}^m$ converge vers une matrice $\mathbf{Q}$, appelée la **matrice limite**. Les éléments de $\mathbf{Q}$, notés $Q_{u,v}$, représentent les **probabilités limites** de se trouver dans l'état v en partant de l'état u après un nombre infini d'étapes.

2. Interprétation des éléments de la $(k + 1)$ -ième colonne de $\mathbf{Q}$

La $(k + 1)$ -ième colonne de $\mathbf{Q}$ contient les probabilités limites $Q_{u,k+1}$, qui peuvent être interprétées comme suit :

$$Q_{u,k+1} = \text{Probabilité que le joueur } A \text{ gagne si la partie commence dans l'état } u.$$

Question 22

Donner la matrice de transition $\mathbf{P}$ dans le cas $k = 3$.

Solution

Matrice de transition $\mathbf{P}$ pour $k = 3$

1. Structure de la matrice $\mathbf{P}$

La matrice $\mathbf{P}$ est une matrice $(k + 1) \times (k + 1)$, ici 4×4 , décrivant les probabilités de transition entre les états $\{0, 1, 2, 3\}$. Les transitions possibles sont définies comme suit :

- **Etat 0 (ruine de A) :**
 - Probabilité de rester dans cet état : $\mathbf{P}_{0,0} = 1$,
 - Toutes les autres probabilités sont nulles : $\mathbf{P}_{0,j} = 0$ pour $j \neq 0$.
- **Etats intermédiaires $1 \leq i \leq k - 1$:**
 - Probabilité de transition vers $i - 1$: $\mathbf{P}_{i,i-1} = 1 - p$,
 - Probabilité de transition vers $i + 1$: $\mathbf{P}_{i,i+1} = p$,
 - Probabilité de rester dans i : $\mathbf{P}_{i,i} = 0$.
- **Etat k (ruine de B) :**
 - Probabilité de rester dans cet état : $\mathbf{P}_{k,k} = 1$,
 - Toutes les autres probabilités sont nulles : $\mathbf{P}_{k,j} = 0$ pour $j \neq k$.

2. Matrice de transition $\mathbf{P}$

En combinant ces informations, la matrice $\mathbf{P}$ est donnée par :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Interprétation

- La première ligne représente l'état 0 (ruine de A) : le système reste bloqué dans cet état.
- Les lignes intermédiaires représentent les transitions entre les états 1 et 2, où le joueur A peut gagner ou perdre selon la probabilité p et $1 - p$, respectivement.
- La dernière ligne représente l'état 3 (ruine de B) : le système reste bloqué dans cet état.

Question 23

Pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donner la première et la dernière ligne de la matrice $\mathbf{P}^m$.

Solution

Première et dernière ligne de $\mathbf{P}^m$ pour $k = 3$

Pour $k = 3$, la matrice $\mathbf{P}^m$ est de dimension 4×4 . Les premières et dernières lignes de cette matrice pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont données comme suit :

1. Première ligne ($u = 0$)

L'état 0 correspond à la ruine de A . Cet état est absorbant, ce qui signifie qu'une fois dans cet état, il est impossible d'en sortir. Par conséquent, la première ligne de $\mathbf{P}^m$ est :

$$\mathbf{P}_0^m = [1, 0, 0, 0].$$

2. Dernière ligne ($u = 3$)

L'état 3 correspond à la ruine de B . Cet état est également absorbant, ce qui signifie qu'une fois dans cet état, il est impossible d'en sortir. Par conséquent, la dernière ligne de $\mathbf{P}^m$ est :

$$\mathbf{P}_3^m = [0, 0, 0, 1].$$

Question 24

Montrer que lorsque $m \rightarrow \infty$, la matrice $\mathbf{P}^m$ converge vers la matrice $\mathbf{Q}$ que vous préciserez. Vérifier que $\mathbf{Q}$ est une matrice stochastique.

Solution

Deuxième et troisième lignes de $\mathbf{P}^m$ pour $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, m pair

1. Propriété à démontrer

Nous devons montrer par récurrence que, lorsque m est pair :

- La deuxième ligne de $\mathbf{P}^m$ est donnée par :

$$\left[q \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j, (pq)^{m/2}, 0, p^2 \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j \right].$$

- La troisième ligne de $\mathbf{P}^m$ est donnée par :

$$\left[q^2 \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j, 0, (pq)^{m/2}, p \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j \right].$$

2. Initialisation ($m = 2$)

La matrice $\mathbf{P}$ pour $k = 3$ est donnée par :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où $q = 1 - p$. Calculons $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q^2 & pq & 0 & p^2 \\ q^2 & 0 & pq & p^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- La deuxième ligne est :

$$[q^2, pq, 0, p^2],$$

ce qui correspond à l'expression donnée avec $m = 2$:

$$q \sum_{j=0}^{2/2-1} (pq)^j = q \cdot 1, \quad (pq)^{2/2} = pq, \quad p^2 \sum_{j=0}^{2/2-1} (pq)^j = p^2 \cdot 1.$$

- La troisième ligne est :

$$[q^2, 0, pq, p],$$

ce qui correspond à l'expression donnée avec $m = 2$:

$$q^2 \sum_{j=0}^{2/2-1} (pq)^j = q^2 \cdot 1, \quad (pq)^{2/2} = pq, \quad p \sum_{j=0}^{2/2-1} (pq)^j = p \cdot 1.$$

L'initialisation est vérifiée.

3. Hérédité

Supposons que l'assertion est vraie pour $m = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}$. Montrons qu'elle est vraie pour $m = 2(k + 1)$.

Deuxième ligne de $\mathbf{P}^{2(k+1)}$: La deuxième ligne de $\mathbf{P}^{2k}$ est donnée par l'hypothèse de récurrence :

$$\left[q \sum_{j=0}^{k-1} (pq)^j, (pq)^k, 0, p^2 \sum_{j=0}^{k-1} (pq)^j \right].$$

En multipliant cette ligne par $\mathbf{P}^2$, la nouvelle deuxième ligne devient :

$$\left[q \sum_{j=0}^k (pq)^j, (pq)^{k+1}, 0, p^2 \sum_{j=0}^k (pq)^j \right].$$

Troisième ligne de $\mathbf{P}^{2(k+1)}$: La troisième ligne de $\mathbf{P}^{2k}$ est donnée par l'hypothèse de récurrence :

$$\left[q^2 \sum_{j=0}^{k-1} (pq)^j, 0, (pq)^k, p \sum_{j=0}^{k-1} (pq)^j \right].$$

En multipliant cette ligne par $\mathbf{P}^2$, la nouvelle troisième ligne devient :

$$\left[q^2 \sum_{j=0}^k (pq)^j, 0, (pq)^{k+1}, p \sum_{j=0}^k (pq)^j \right].$$

L'hérédité est vérifiée.

4. Conclusion

Par récurrence, nous avons montré que pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pair :

- La deuxième ligne de $\mathbf{P}^m$ est donnée par :

$$\left[q \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j, (pq)^{m/2}, 0, p^2 \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j \right].$$

- La troisième ligne de $\mathbf{P}^m$ est donnée par :

$$\left[q^2 \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j, 0, (pq)^{m/2}, p \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j \right].$$

Question 25

En utilisant la question précédente, donner la deuxième et la troisième ligne de la matrice $\mathbf{P}^m$ lorsque m est impair.

Solution

Pour $\mathbf{P}^m$, lorsque m est impair, nous avons :

$$\mathbf{P}^m = \mathbf{P}^{m-1} \cdot \mathbf{P},$$

où $\mathbf{P}^{m-1}$ est la matrice obtenue après $m-1$ étapes (avec $m-1$ pair), et $\mathbf{P}$ est la matrice de transition initiale.

Lorsque m est impair, les deuxièmes et troisièmes lignes de $\mathbf{P}^m$ sont données par :

- **Deuxième ligne de $\mathbf{P}^{m-1}$:**

$$\left[q \sum_{j=0}^{(m-1)/2-1} (pq)^j, 0, (pq)^{(m-1)/2}, p^2 \sum_{j=0}^{(m-1)/2-1} (pq)^j \right].$$

- **Troisième ligne de $\mathbf{P}^{m-1}$:**

$$\left[q^2 \sum_{j=0}^{(m-1)/2-1} (pq)^j, (pq)^{(m-1)/2}, 0, p \sum_{j=0}^{(m-1)/2-1} (pq)^j \right].$$

Question 26

Montrer que lorsque $m \rightarrow \infty$, la matrice $\mathbf{P}^m$ converge vers la matrice $\mathbf{Q}$ que vous préciserez. Vous vérifierez également que $\mathbf{Q}$ est une matrice stochastique.

Solution

Convergence de $\mathbf{P}^m$ vers $\mathbf{Q}$

1. Comportement de $\mathbf{P}^m$ lorsque $m \rightarrow \infty$

- **Absorbance des états 0 et k :** Les états 0 (ruine de A) et k (ruine de B) sont absorbants. Cela signifie que les premières et dernières lignes de $\mathbf{P}^m$ sont constantes :

$$\mathbf{P}_0^m = [1, 0, \dots, 0], \quad \mathbf{P}_k^m = [0, 0, \dots, 1].$$

- **Comportement des autres lignes :** Pour $1 \leq i \leq k-1$, lorsque $m \rightarrow \infty$, les probabilités de transition convergent vers les probabilités limites dépendant des chances d'atteindre 0 ou k .

- **Forme de Q** : En utilisant la question précédente, la matrice limite Q est donnée par :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{q}{1-pq} & 0 & 0 & \frac{p^2}{1-pq} \\ \frac{q^2}{1-pq} & 0 & 0 & \frac{p}{1-pq} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où $q = 1 - p$.

2. Vérification que Q est une matrice stochastique

La matrice Q est stochastique, car tous ses éléments sont positifs ou nuls et la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1.

Question 27

Avant de commencer le jeu, une tierce personne lance la pièce : si elle tombe sur “face”, le joueur A reçoit la somme de 1 euro (et donc le joueur B reçoit 2 euros) sinon il reçoit 2 euros. Calculer la probabilité que le joueur A gagne en fonction de p .

Solution à la Question 27

La probabilité que le joueur A gagne est :

$$\begin{aligned} & p \times Q_{2,4} + (1-p) \times Q_{3,4} \\ &= \frac{p^3}{1-pq} + \frac{pq}{1-pq} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } p = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{3} & \text{si } p = \frac{1}{3}. \end{cases} \\ &= \frac{p^3 + pq}{1-pq} = p \frac{p^2 + q}{1-pq} = p \frac{p^2 + 1 - p}{1 - p + p^2} = p. \end{aligned}$$

Problème du char d'assaut allemand

Question 1

A quoi correspondent les entiers s , N , et n dans le problème des chars d'assaut ?

Solution

- s : il s'agit du numéro de série du premier char produit. Ce numéro est inconnu, et tous les numéros de série ultérieurs sont incrémentés de 1 à partir de s .
- N : il s'agit du nombre total de chars produits par les Allemands, dont la valeur est également inconnue. Les numéros de série vont de $s + 1$ à $s + N$.
- n : il s'agit du nombre de chars capturés par les Alliés et dont les numéros de série ont été observés. Ces numéros permettent d'estimer N .

Question 2

Quel est le cardinal de l'ensemble E_n ?

Solution

L'ensemble E_n est défini comme :

$$E_n = \{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \{1, \dots, N\}^n \mid i_1 < i_2 < \dots < i_n\}.$$

Cela représente l'ensemble des n -uplets croissants distincts que l'on peut former à partir de N entiers consécutifs. Le cardinal de cet ensemble correspond au nombre de façons de choisir n éléments distincts parmi N . Ce cardinal est donné par le coefficient binomial :

$$|E_n| = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

Explication

- Le choix de n éléments parmi N est une combinaison, car l'ordre des éléments sélectionnés n'a pas d'importance.
- Le cardinal est donc le nombre de sous-ensembles de taille n que l'on peut former parmi les N entiers.

Question 3

Quelle est la loi de la variable aléatoire $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$?

Solution

La variable aléatoire $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ correspond aux n -uplets ordonnés des numéros de série capturés. Ces n -uplets sont tirés de manière uniforme parmi tous les n -uplets ordonnés possibles dans $\{s + 1, \dots, s + N\}$.

La probabilité associée à chaque réalisation $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ de la variable aléatoire $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ est donnée par :

$$P[(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)})] = \frac{1}{\binom{N}{n}},$$

où $\binom{N}{n}$ est le nombre total de combinaisons de n éléments parmi N .

Justification

- L'ensemble des numéros capturés est tiré de manière uniforme et aléatoire parmi les N entiers.
- Chaque réalisation de $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ a une probabilité identique, car toutes les combinaisons sont équiprobables dans un tirage aléatoire sans remise.

Question 4

Montrer que si $Y \sim \mathcal{H}(N, n, m)$, alors $E(Y) = \frac{m(N+1)}{n+1}$.

Solution

La variable aléatoire Y suit une loi hypergéométrique inverse de paramètres N , n , et m , notée $Y \sim \mathcal{H}(N, n, m)$. La définition de cette loi donne :

$$P(Y = i) = \frac{\binom{i-1}{m-1} \binom{N-i}{n-m}}{\binom{N}{n}}, \quad \text{pour } i \in \{m, \dots, N - n + m\}.$$

Espérance de Y

L'espérance $E(Y)$ est donnée par :

$$E(Y) = \sum_{i=m}^{N-n+m} i \cdot P(Y = i)$$

Substituons $i \binom{i-1}{m-1}$ par $m \binom{i}{m}$ dans l'expression de $P(Y = i)$:

$$E(Y) = \frac{m}{\binom{N}{n}} \sum_{i=m}^{N-n+m} \binom{i}{m} \binom{N-i}{n-m}.$$

La somme dans cette expression correspond au coefficient binomial étendu $\binom{N+1}{n+1}$. Donc, après simplification :

$$E(Y) = \frac{m}{\binom{N}{n}} \cdot \binom{N+1}{n+1}.$$

Enfin, en utilisant $\binom{N+1}{n+1} = \frac{(N+1)\binom{N}{n}}{n+1}$, on obtient :

$$E(Y) = \frac{m(N+1)}{n+1}.$$

Question 5

Montrer que si $Y \sim \mathcal{H}(N, n, m)$, alors $\text{Var}(Y) = \frac{m(N+1)(N-n)(n-m+1)}{(n+1)^2(n+2)}$.

Solution

Formule de la variance

Pour une variable $Y \sim \mathcal{H}(N, n, m)$, la variance est donnée par :

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2.$$

Nous savons déjà que :

$$E(Y) = \frac{m(N+1)}{n+1}.$$

Il reste à déterminer $E(Y^2)$.

Calcul de $E(Y^2)$

Utilisons la relation suivante entre l'espérance quadratique et les coefficients binomiaux :

$$i^2 \binom{i-1}{m-1} = m \left[\binom{i}{m} + (m-1) \binom{i}{m+1} \right].$$

En substituant cette expression dans la somme pour $E(Y^2)$, on obtient :

$$E(Y^2) = \frac{m}{\binom{N}{n}} \sum_{i=m}^{N-n+m} \left[\binom{i}{m} + (m-1) \binom{i}{m+1} \right] \binom{N-i}{n-m}.$$

Cette somme se simplifie grâce aux propriétés des coefficients binomiaux, donnant finalement :

$$E(Y^2) = \frac{m(N+1)(N+2)}{(n+1)(n+2)}.$$

Calcul de la variance

Substituons les expressions trouvées dans la formule de la variance :

$$\text{Var}(Y) = \frac{m(N+1)(N+2)}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{m(N+1)}{n+1} \right)^2.$$

Après simplification, on obtient :

$$\text{Var}(Y) = \frac{m(N+1)(N-n)(n-m+1)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Question 6

Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire $X_{(k)}$?

Solution

La variable aléatoire $X_{(k)}$ représente la k -ième valeur minimale parmi les n valeurs tirées aléatoirement dans l'ensemble $\{s+1, \dots, s+N\}$. En d'autres termes, c'est la k -ième plus petite valeur parmi les n numéros de série capturés.

Ensemble des valeurs possibles pour $X_{(k)}$

Pour $X_{(k)}$, les valeurs possibles dépendent de sa position k et des contraintes imposées par la structure des tirages :

$$X_{(k)} \in \{s+k, s+k+1, \dots, s+N-n+k\}.$$

- $s+k$: C'est la valeur minimale que peut prendre $X_{(k)}$, car les $k-1$ valeurs précédentes doivent être inférieures.
- $s+N-n+k$: C'est la valeur maximale que peut prendre $X_{(k)}$, car les $n-k$ valeurs restantes doivent être supérieures.

Question 7

Montrer que $X_{(k)} - s$ suit une loi hypergéométrique inverse dont vous préciserez les paramètres.

Solution

La variable aléatoire $X_{(k)} - s$ représente la k -ième plus petite valeur parmi les n tirages dans l'ensemble $\{1, \dots, N\}$. Elle suit une loi hypergéométrique inverse avec les paramètres N (taille de l'ensemble), n (nombre de tirages), et k (position de la valeur minimale).

Définition des probabilités élémentaires

Pour une loi hypergéométrique inverse, la probabilité que $X_{(k)} - s = i$ est donnée par :

$$P(X_{(k)} - s = i) = \frac{\binom{i-1}{k-1} \binom{N-i}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

où :

- $i \in \{k, k+1, \dots, N-n+k\}$,
- $\binom{i-1}{k-1}$ est le nombre de façons de choisir $k-1$ éléments parmi les $i-1$ premiers,
- $\binom{N-i}{n-k}$ est le nombre de façons de choisir les $n-k$ éléments parmi les $N-i$ derniers,
- $\binom{N}{n}$ est le nombre total de combinaisons de n éléments parmi N .

Interprétation

- $i-1$: Correspond aux $i-1$ premiers éléments de l'ensemble $\{1, \dots, N\}$.
- $k-1$: Représente les $k-1$ éléments qui précèdent la k -ième plus petite valeur.
- $N-i$: Correspond aux $N-i$ éléments après le i -ième élément.
- $n-k$: Représente les $n-k$ valeurs restantes tirées.

Question 8

Montrer que $\hat{N}(n, k, \ell)$ est un estimateur sans biais de N

Solution

On considère l'estimateur :

$$\hat{N}(n, k, \ell) := \frac{n+1}{\ell-k} (X_{(\ell)} - X_{(k)}) - 1.$$

Nous devons montrer que cet estimateur est sans biais, c'est-à-dire que :

$$E[\hat{N}(n, k, \ell)] = N.$$

Espérance de $\hat{N}(n, k, \ell)$

1. Expression de $\hat{N}(n, k, \ell)$:

$$\hat{N}(n, k, \ell) = \frac{n+1}{\ell-k} (X_{(\ell)} - X_{(k)}) - 1.$$

2. Espérance de $X_{(\ell)} - X_{(k)}$:

Les variables $X_{(k)}$ et $X_{(\ell)}$ sont respectivement les k -ième et ℓ -ième plus petites valeurs parmi les n tirages. La différence $X_{(\ell)} - X_{(k)}$ mesure l'écart entre ces deux rangs dans l'ensemble $\{s+1, \dots, s+N\}$. Par propriété des lois hypergéométriques inverses, l'espérance de $X_{(\ell)} - X_{(k)}$ est donnée par :

$$E[X_{(\ell)} - X_{(k)}] = \frac{\ell-k}{n+1} (N+1).$$

3. **Espérance de $\hat{N}(n, k, \ell)$:**

En substituant $E[X_{(\ell)} - X_{(k)}]$ dans l'expression de $\hat{N}(n, k, \ell)$:

$$E[\hat{N}(n, k, \ell)] = \frac{n+1}{\ell-k} \cdot \frac{\ell-k}{n+1} (N+1) - 1 = N.$$

0.1 Question 9

Quelle est la valeur de l'estimateur $\hat{N}(n, k, \ell)$ lorsque $n = N$ (i.e., lorsqu'on tire tous les éléments de $\{s+1, \dots, s+N\}$) ?

Solution

Lorsqu'on tire tous les éléments de l'ensemble $\{s+1, \dots, s+N\}$, cela signifie que $n = N$. Nous déterminons alors la valeur de l'estimateur $\hat{N}(n, k, \ell)$ dans ce cas.

Etapes de la démonstration

1. **Propriété de $X_{(k)}$ et $X_{(\ell)}$:**

- Si tous les éléments sont observés ($n = N$), alors :

$$X_{(k)} = s+k \quad \text{et} \quad X_{(\ell)} = s+\ell,$$

car les k -ième et ℓ -ième plus petites valeurs correspondent exactement à leur rang dans l'ensemble $\{s+1, \dots, s+N\}$.

2. **Différence $X_{(\ell)} - X_{(k)}$:**

$$X_{(\ell)} - X_{(k)} = (s+\ell) - (s+k) = \ell - k.$$

3. **Substitution dans $\hat{N}(n, k, \ell)$:** Par définition :

$$\hat{N}(n, k, \ell) = \frac{n+1}{\ell-k} (X_{(\ell)} - X_{(k)}) - 1.$$

En substituant $X_{(\ell)} - X_{(k)} = \ell - k$ et $n = N$:

$$\hat{N}(N, k, \ell) = \frac{N+1}{\ell-k} (\ell - k) - 1.$$

4. **Simplification :**

$$\hat{N}(N, k, \ell) = N+1-1 = N.$$

Question 10

Justifier l'équivalence : l'événement $[X_{(k)} = i] \cap [X_{(\ell)} = j]$ est non vide si et seulement si :

$$k \leq i, \quad j - i \geq \ell - k, \quad \text{et} \quad N - j \geq n - \ell.$$

Solution

Analyse et justification

L'objectif est de comprendre les conditions sur i et j pour que $[X_{(k)} = i] \cap [X_{(\ell)} = j]$ soit possible, c'est-à-dire que i soit la k -ième plus petite valeur et j soit la ℓ -ième plus petite valeur parmi les n tirages dans $\{1, \dots, N\}$.

1. **Condition** $k \leq i$:

- i est la k -ième plus petite valeur, donc il doit y avoir au moins $k - 1$ valeurs strictement inférieures à i .
- Cela impose $k \leq i$.

2. **Condition** $j - i \geq \ell - k$:

- j est la ℓ -ième plus petite valeur. Entre i (la k -ième) et j , il doit y avoir exactement $(\ell - k - 1)$ valeurs intermédiaires.
- Cela impose $j - i \geq \ell - k$.

3. **Condition** $N - j \geq n - \ell$:

- j est la ℓ -ième plus petite valeur. Il doit donc rester au moins $(n - \ell)$ valeurs strictement supérieures à j dans l'ensemble $\{1, \dots, N\}$.
- Cela impose $N - j \geq n - \ell$.

Conclusion

L'événement $[X_{(k)} = i] \cap [X_{(\ell)} = j]$ est non vide si et seulement si :

$$k \leq i, \quad j - i \geq \ell - k, \quad \text{et} \quad N - j \geq n - \ell.$$

Question 11

Que faut-il mettre à la place des points d'interrogation pour que :

$$E^*(N, n, k, \ell) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid k \leq i \leq ?, \ell - k + i \leq j \leq ?\}$$

soit l'ensemble des valeurs prises par le couple $(X_{(k)}, X_{(\ell)})$?

Solution

Nous devons compléter l'expression suivante pour que $E^*(N, n, k, \ell)$ représente l'ensemble des valeurs possibles du couple $(X_{(k)}, X_{(\ell)})$:

$$E^*(N, n, k, \ell) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid k \leq i \leq ?, \ell - k + i \leq j \leq ?\}.$$

Etape 1 : Déterminer les bornes pour i

- $X_{(k)} = i$ implique que $i \geq k$, car il doit y avoir $k - 1$ valeurs strictement inférieures à i .
- La valeur maximale de i est imposée par la condition que $j = X_{(\ell)}$ reste dans l'ensemble $\{1, \dots, N\}$. Cela impose :

$$i \leq N - n + k.$$

Ainsi, la borne supérieure pour i est $N - n + k$.

Etape 2 : Déterminer les bornes pour j

- j doit être supérieur ou égal à $\ell - k + i$, car il doit y avoir au moins $(\ell - k - 1)$ valeurs entre i et j .
- La valeur maximale de j est imposée par la condition qu'il reste au moins $(n - \ell)$ valeurs après j , ce qui donne :

$$j \leq N - n + \ell.$$

Ainsi, la borne supérieure pour j est $N - n + \ell$.

Conclusion

L'ensemble des valeurs possibles pour $(X_{(k)}, X_{(\ell)})$ est donné par :

$$E^*(N, n, k, \ell) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid k \leq i \leq N - n + k, \ell - k + i \leq j \leq N - n + \ell\}.$$

Question 12

Donner l'expression de la probabilité $P([X_{(k)} = i] \cap [X_{(\ell)} = j])$, où $(i, j) \in E^*(N, n, k, \ell)$.

Solution

La probabilité est donnée par :

$$P([X_{(k)} = i] \cap [X_{(\ell)} = j]) = \frac{\binom{i-1}{k-1} \binom{j-i-1}{\ell-k-1} \binom{N-j}{n-\ell}}{\binom{N}{n}}.$$

Justification des termes

- $\binom{i-1}{k-1}$: Nombre de façons de choisir $k - 1$ valeurs parmi les $i - 1$ premières valeurs de $\{1, \dots, N\}$ pour que $X_{(k)} = i$.
- $\binom{j-i-1}{\ell-k-1}$: Nombre de façons de choisir les $\ell - k - 1$ valeurs intermédiaires entre i et j pour que $X_{(\ell)} = j$.
- $\binom{N-j}{n-\ell}$: Nombre de façons de choisir les $n - \ell$ valeurs restantes parmi les $N - j$ valeurs strictement supérieures à j .
- $\binom{N}{n}$: Nombre total de façons de tirer n valeurs parmi les N possibles, représentant l'espace des événements.

Domaine de validité

Cette probabilité est définie uniquement lorsque $(i, j) \in E^*(N, n, k, \ell)$, soit :

$$k \leq i \leq N - n + k, \quad \ell - k + i \leq j \leq N - n + \ell.$$

Question 13

Montrer que :

$$\sum_{(i,j) \in E^*} \binom{i-1}{k-1} \binom{j-i-1}{\ell-k-1} \binom{N-j}{n-\ell} = \binom{N}{n}.$$

Solution

Nous devons montrer que :

$$\sum_{(i,j) \in E^*} \binom{i-1}{k-1} \binom{j-i-1}{\ell-k-1} \binom{N-j}{n-\ell} = \binom{N}{n}.$$

Interprétation combinatoire

- La gauche de l'égalité représente une sommation sur toutes les paires (i, j) possibles où $X_{(k)} = i$ et $X_{(\ell)} = j$.
- Chaque terme $\binom{i-1}{k-1} \binom{j-i-1}{\ell-k-1} \binom{N-j}{n-\ell}$ décompose le choix des n valeurs tirées parmi N :
 - $\binom{i-1}{k-1}$: Nombre de façons de choisir les $k-1$ valeurs inférieures à i ,
 - $\binom{j-i-1}{\ell-k-1}$: Nombre de façons de choisir les $\ell-k-1$ valeurs entre i et j ,
 - $\binom{N-j}{n-\ell}$: Nombre de façons de choisir les $n-\ell$ valeurs supérieures à j .

Construction du tirage

Le tirage total des n valeurs parmi $\{1, \dots, N\}$ peut être décomposé en trois parties :

- $k-1$ valeurs inférieures à i ,
- $\ell-k-1$ valeurs entre i et j ,
- $n-\ell$ valeurs supérieures à j .

La somme sur tous les $(i, j) \in E^*$ recouvre tous les choix possibles pour ces trois parties.

Regroupement combinatoire

La somme des termes couvre exactement tous les sous-ensembles de taille n parmi les N éléments, indépendamment de l'ordre. Par construction :

$$\sum_{(i,j) \in E^*} \binom{i-1}{k-1} \binom{j-i-1}{\ell-k-1} \binom{N-j}{n-\ell} = \binom{N}{n}.$$

Question 14

Montrer que pour tout $1 \leq k < \ell \leq n$,

$$E[X_{(k)} \cdot (X_{(\ell)} - X_{(k)})] = \frac{\ell - k}{n - k + 1} \cdot \left[(N + 1) \cdot E[X_{(k)}] - E[X_{(k)}^2] \right].$$

Solution

D'après la définition de l'espérance et la loi jointe $(X_{(k)}, X_{(\ell)})$, nous avons

$$\begin{aligned} E[X_{(k)} \cdot (X_{(\ell)} - X_{(k)})] &= \sum_{i=k}^{N-n+k} \sum_{j=\ell-k+i}^{N-n+\ell} i(j-i) \frac{\binom{i-1}{k-1} \binom{j-i-1}{\ell-k-1} \binom{N-j}{n-\ell}}{\binom{N}{n}} \\ &= \sum_{i=k}^{N-n+k} i \binom{i-1}{k-1} \sum_{j=\ell-k+i}^{N-n+\ell} (j-i) \frac{\binom{j-i-1}{\ell-k-1} \binom{N-j}{n-\ell}}{\binom{N}{n}}. \end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{j=\ell-k+i}^{N-n+\ell} (j-i) \binom{j-i-1}{\ell-k-1} \binom{N-j}{n-\ell} = (\ell-k) \sum_{j=\ell-k+i}^{N-n+\ell} \binom{j-i}{\ell-k} \binom{N-j}{n-\ell}.$$

Posons $x = j - i + 1$,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=\ell-k+i}^{N-n+\ell} (j-i) \binom{j-i-1}{\ell-k-1} \binom{N-j}{n-\ell} \\ &= (\ell-k) \sum_{x=\ell-k+1}^{N-n+\ell-i+1} \binom{x-1}{\ell-k-1} \binom{N-x-i+1}{n-\ell} \\ &= (\ell-k) \sum_{x=\ell-k+1}^{N-n+\ell-i+1} \binom{x-1}{\ell-k-1} \binom{N-x-i+1}{n-(\ell-k+1)-h+1} \\ &= (\ell-k) \binom{N-i+1}{n-k+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'espérance est donnée par :

$$E[X_{(k)} \cdot (X_{(\ell)} - X_{(k)})] = (\ell-k) \sum_{i=k}^{N-n-k} i \binom{i-1}{k-1} \binom{N-i+1}{n-k+1} / \binom{N}{n}.$$

Or

$$E(X_{(k)}) = \sum_{i=h}^{N-n-k} i \binom{i-1}{k-1} \binom{N-i}{n-k} / \binom{N}{n}.$$

En combinant, nous obtenons :

$$E[X_{(k)} \cdot (X_{(\ell)} - X_{(k)})] = \frac{\ell-k}{n-k+1} \{(N+1)E(X_{(k)}) - E[(X_{(k)})^2]\}.$$

Question 15

En déduire la covariance entre $X_{(k)}$ et $X_{(\ell)}$ lorsque $1 \leq k < \ell \leq n$, sous la forme :

$$\text{Cov}(X_{(k)}, X_{(\ell)}) = r(n, k, \ell) \cdot \text{Var}(X_{(k)}),$$

où $r(n, k, \ell)$ est une expression à déterminer.

Solution

Nous devons montrer que la covariance entre $X_{(k)}$ et $X_{(\ell)}$, avec $1 \leq k < \ell \leq n$, peut être exprimée sous la forme :

$$\text{Cov}(X_{(k)}, X_{(\ell)}) = r(n, k, \ell) \cdot \text{Var}(X_{(k)}),$$

où $r(n, k, \ell)$ est un facteur à déterminer.

Définition de la covariance

La covariance entre $X_{(k)}$ et $X_{(\ell)}$ est définie comme :

$$\text{Cov}(X_{(k)}, X_{(\ell)}) = E[X_{(k)} \cdot X_{(\ell)}] - E[X_{(k)}] \cdot E[X_{(\ell)}].$$

Calcul de $E[X_{(k)} \cdot X_{(\ell)}]$

En utilisant les résultats de la question précédente, nous savons que :

$$E[X_{(k)} \cdot X_{(\ell)}] = \frac{\ell-k}{n-k+1} \cdot \left[(N+1) \cdot E[X_{(k)}] - E[X_{(k)}^2] \right] + E[X_{(k)}^2].$$

Expression de la covariance

Substituons cette expression dans la définition de la covariance :

$$\text{Cov}(X_{(k)}, X_{(\ell)}) = \frac{\ell - k}{n - k + 1} \cdot \left[(N + 1) \cdot E[X_{(k)}] - E[X_{(k)}^2] \right] + E[X_{(k)}^2] - E[X_{(k)}] \cdot E[X_{(\ell)}].$$

Simplifions cette expression et exprimons-la en termes de la variance $\text{Var}(X_{(k)})$.

Facteur de proportionnalité

La covariance peut être réécrite sous la forme :

$$\text{Cov}(X_{(k)}, X_{(\ell)}) = r(n, k, \ell) \cdot \text{Var}(X_{(k)}),$$

où :

$$r(n, k, \ell) = \frac{n - \ell + 1}{n - k + 1}.$$

Question 16

Utiliser les résultats précédents pour montrer que :

$$\text{Var}(\hat{N}(n, k, \ell)) = \frac{(N + 1)(N - n)}{(\ell - k)^2(n + 2)} \cdot [k(n - k + 1) + (\ell - 2k)(n - \ell + 1)].$$

Solution

Etales de la démonstration

1. **Définition de $\hat{N}(n, k, \ell)$** : L'estimateur $\hat{N}(n, k, \ell)$ est donné par :

$$\hat{N}(n, k, \ell) = \frac{n + 1}{\ell - k} (X_{(\ell)} - X_{(k)}) - 1.$$

Sa variance est donc :

$$\text{Var}(\hat{N}(n, k, \ell)) = \left(\frac{n + 1}{\ell - k} \right)^2 \cdot \text{Var}(X_{(\ell)} - X_{(k)}).$$

2. **Variance de la différence $X_{(\ell)} - X_{(k)}$** : En utilisant les propriétés de la variance et de la covariance :

$$\text{Var}(X_{(\ell)} - X_{(k)}) = \text{Var}(X_{(\ell)}) + \text{Var}(X_{(k)}) - 2 \cdot \text{Cov}(X_{(k)}, X_{(\ell)}).$$

3. **Substitution des expressions** : Nous utilisons les formules suivantes :

- $\text{Var}(X_{(k)}) = \frac{k(N + 1)(N - n)}{(n + 1)^2(n + 2)},$
- $\text{Var}(X_{(\ell)}) = \frac{\ell(N + 1)(N - n)}{(n + 1)^2(n + 2)},$
- $\text{Cov}(X_{(k)}, X_{(\ell)}) = \frac{n - \ell + 1}{n - k + 1} \cdot \text{Var}(X_{(k)}).$

Substituons ces termes dans l'expression de $\text{Var}(X_{(\ell)} - X_{(k)})$.

4. **Simplification** : Après simplifications, la variance $\text{Var}(\hat{N}(n, k, \ell))$ devient :

$$\text{Var}(\hat{N}(n, k, \ell)) = \frac{(N + 1)(N - n)}{(\ell - k)^2(n + 2)} \cdot [k(n - k + 1) + (\ell - 2k)(n - \ell + 1)].$$

Question 17

Après avoir étudié la fonction $k \mapsto \sigma_n^2(k)$, quel choix proposer pour k afin de minimiser la variance de l'estimateur $\hat{N}(n, k, n)$?

Solution

Nous devons minimiser la variance de l'estimateur $\hat{N}(n, k, n)$, donnée par :

$$\sigma_n^2(k) := \text{Var}(\hat{N}(n, k, n)) = \frac{(N+1)(N-n)}{(n-k)^2(n+2)} \cdot [k(n-k+1) + (n-2k)].$$

1. **Expression simplifiée :** La variance dépend de k selon :

$$\sigma_n^2(k) = \frac{(N+1)(N-n)}{(n+2)} \cdot \frac{k(n-k+1) + n-2k}{(n-k)^2}.$$

Les termes constants par rapport à k sont $(N+1)(N-n)$ et $(n+2)$. La minimisation revient donc à étudier la fonction :

$$f(k) = \frac{k(n-k+1) + n-2k}{(n-k)^2}.$$

En dérivant par rapport à k ,

$$\begin{aligned} f'(k) &= \frac{(n-2k+1-2)(n-k)^2 + 2(n-k)(k(n-k+1) + n-2k)}{(n-k)^4} \\ &= \frac{1}{(n-k)^3} [(n-k)(n-2k-1) + 2k(n-k+1) + 2n-4k] \\ &= \frac{1}{(n-k)^3} [n^2 - 2nk - n - nk + 2k^2 + k + 2nk - 2k^2 + 2n - 4k] \\ &= \frac{1}{(n-k)^3} [n^2 - nk + n - k] \\ &= \frac{1}{(n-k)^2} [1 + n] > 0. \end{aligned}$$

2. **Etude de $f(k)$:**

- La fonction $f(k)$ est définie pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$.
- $f(k)$ est une fonction rationnelle, croissante.

3. **Minimum de $\sigma_n^2(k)$:**

- La fonction $f(k)$ atteint son minimum lorsque $k = 1$.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve de français

Éléments de correction

Proposition de résumé en 214 mots

Les sociétés modernes se retrouvent face à un paradoxe : la parole manipulatoire est présente partout or rien n'est fait - y compris dans les programmes scolaires - pour permettre de la repérer et s'en défendre. Et pourtant tous les domaines sont touchés ; la publicité en particulier.

L'absence de réflexion sur ce phénomène conduit à une régression civilisationnelle. Dans l'Antiquité, Tacite regrettait déjà le déclin de la bonne rhétorique qui autorisait les débats au profit d'interventions rapides. De nos jours, le problème est plus prégnant encore, facilité par les médias, la télévision notamment, qui diffusent une pensée unique. Ainsi le libéralisme nous est imposé ; la propagande est installée dans les pays démocratiques (qui pourtant osent critiquer les régimes totalitaires !) servant des discours jugés respectables ; le slogan publicitaire est banalisé.

Face à ce phénomène les citoyens ne sont pas éduqués. On prône les valeurs démocratiques mais on supprime les moyens de lutter contre les paroles manipulatoires trompeuses.

La solution est désormais de ne plus accepter la justification de ces discours fallacieux au service d'un but considéré comme légitime. Une parole éthique est seule garante du respect du destinataire mais aussi du locuteur. Elle est également nécessaire car toute violence - et la parole qui manipule est une violence faite à autrui - est aujourd'hui condamnée.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve d'anglais

Éléments de correction

1 Summarize this text in English in 200 words (+/- 10%)

The text critiques the effectiveness of corporate sustainability schemes in addressing climate challenges. Despite the Paris Agreement's 2°C threshold, briefly surpassed on November 17, 2023, many companies fail to align their Environmental, Social, and Governance (ESG) goals with substantive action. Research assessing 20 major sustainability frameworks, such as the UN Sustainable Development Goals (SDGs), Global Reporting Initiative (GRI), and Certified B Corporations, found them insufficient.

Most schemes promote incremental progress while ignoring supply-chain emissions, which often account for over 90% of a company's carbon footprint. For example, companies favor carbon offsets, criticized for ineffectiveness, over reducing operational emissions. Frameworks like SDGs lack enforceability, leaving companies free to decide their actions. Similarly, the GRI focuses on reporting, not reducing emissions, while B Corps vaguely require "science-based action."

Some frameworks perform better. The circular economy minimizes waste and extends product life cycles. Doughnut economics balances ecological limits with societal needs, yet remains underused by businesses. Planetary boundaries identify safe environmental thresholds for human activity, and The Natural Step (TNS) offers principles to guide sustainable practices, adopted by companies like Nike. These models show promise but require broader adoption to transition businesses from growth-driven to sustainability-focused practices.

2 Translate the following text into French

Comment les frères Barclay ont construit et détruit un empire Les jumeaux ont accumulé hôtels, journaux et même une forteresse sur leur propre île – puis leur fortune a disparu.

Par Pippa Bailey. Source : New Statesman

Au cours de l'été 2022, le milliardaire Frederick Barclay, alors âgé de 87 ans et présent sur la Rich List du Sunday Times, a comparu devant la Haute Cour, accusé par son ex-épouse de ne pas avoir respecté leur accord de divorce d'un montant de 100 millions de livres. Les neveux de Frederick, fils de son frère jumeau David, étaient représentés par plus d'avocats dans la salle d'audience que leur oncle ou tante et ont tenté, sans succès, d'empêcher la publication des informations sur l'affaire. Cela reflète bien la famille, notoirement avare de publicité. "Après une vie de discrétion", écrit Jane Martinson dans son récit sur les jumeaux et leurs affaires, "des histoires de disputes familiales et de crises ont soudainement envahi les pages des journaux."

Le problème du tribunal était que le réseau d'entreprises des Barclay était si complexe que personne, même au sein de la famille, ne semblait le comprendre. "L'affaire revenait sans cesse à deux questions : la recherche de sommes d'argent colossales dans des structures de propriété opaques et l'identification du contrôleur ultime." Cela pose également un problème à Martinson, car bien que You May Never See Us Again suive les indices comme un

détective, le tableau général reste frustrant, juste hors de portée. Frederick a déclaré au juge que le problème n'était pas qu'il refusait de payer, mais qu'il en était incapable. La moitié d'un partenariat autrefois estimé à 6 milliards de livres affirmait désormais ne plus avoir d'argent. Où était-il passé?