Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants.

Rappel : Pour toutes les épreuves, les appareils électroniques (calculatrices, téléphones, traductrices), les casques, et les dictionnaires, ainsi que tout document, sont interdits.

Exercice 1. Probabilités.

Si X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note G_X sa fonction génératrice, définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = n) t^n,$$

lorsque la série converge.

1. (a) Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$ en fonction de celles de X et Y et en déduire une relation entre G_{X+Y}, G_X et G_Y.

   (b) Généraliser le résultat précédent à la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

2. On veut montrer qu'il n'est pas possible de construire un dé faussé à 6 faces (numérotées de 1 à 6) tel que si on le lance deux fois, la somme des deux résultats obtenus suive une loi uniforme sur $\{2, 3, 4, \ldots, 12\}$.

   (a) Soit U la loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$. Déterminer sa fonction génératrice G_U et déterminer toutes les racines réelles de G_U ainsi que leur multiplicité.

   (b) Supposons que l'on ait un dé à 6 faces tel que la probabilité d'apparition de la face $i \in \{1, \ldots, 6\}$ soit égale à p_i, avec $p_i \in]0, 1[$. Soit X la loi d'apparition de la face i. Montrer que G_X admet une racine non-nulle.

   (c) Conclure.

3. Un commerçant reçoit dans son magasin N clients par jour, où N est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque client repart avec un produit avec une probabilité $p \in [0, 1]$. On supposera que les comportements de deux clients distincts sont indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de produits vendus par jour.

   (a) Préciser la fonction caractéristique de N.

   (b) Déterminer la fonction caractéristique de Y et montrer que Y suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

◇

Exercice 2. autour de la constante d'Euler.

Dans ce problème on étudie plusieurs propriétés et expressions de la constante γ d'Euler. Les parties 2 et 3 sont indépendantes et utilisent les résultats de la partie 1.

On rappelle l'énoncé du théorème de convergence dominée :

Théorème. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur un intervalle I. On suppose qu'il existe une fonction positive g telle que l'intégrale $\int_I g(x)\mathrm{d}x$ converge et pour tout n on a $|f_n| \leq g$. Alors les intégrales $\int_I f_n(x)\mathrm{d}x$ et $\int_I f(x)\mathrm{d}x$ convergent absolument et $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x = \int_I f(x)\mathrm{d}x$.*

Partie 1 : Préambule

Pour tout $n \geq 1$, on note

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

la n^{e} somme partielle de la série harmonique.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a l'inégalité $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$, et utiliser cette inégalité pour montrer que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

2. (a) Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\left|\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{C}{n^2}.$$

   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$ converge, puis qu'il existe une constante γ telle que

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1) \text{ quand } n \to \infty.$$

Cette constante γ s'appelle la constante d'Euler, dont nous allons étudier certaines propriétés dans les parties suivantes.

Partie 2 : Une expression intégrale de la constante d'Euler.

L'objet de cette partie est d'établir la formule

$$\int_0^{\infty} \ln(t)\, e^{-t} \mathrm{d}t = -\gamma. \tag{1}$$

3. Montrer que les intégrales impropres $\int_0^1 \ln(t)\, e^{-t} \mathrm{d}t$ et $\int_1^{\infty} \ln(t)\, e^{-t} \mathrm{d}t$ sont convergentes.

4. (a) Montrer que pour tout $u \in]-1, \infty[$ on a $\ln(1+u) \leq u$

   (b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ et tout $t \in [0, n]$ on a

$$0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leq e \cdot e^{-t}.$$

5. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \ln(t) e^{-t} \mathrm{d}t.$$

6. Montrer successivement les égalités

$$\int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \mathrm{d}t = \ln n + \int_0^1 n \ln(u)(1-u)^{n-1} \mathrm{d}u = \ln n + \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} \mathrm{d}u$$

7. En déduire la formule (1)

Partie 3 : Lien avec la fonction ζ.

Pour tout $s > 1$ on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ (qui se prononce "dzêta").

8. Montrer que pour tout $s > 1$, $\zeta(s)$ est bien définie et vérifie
$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leq \zeta(s) \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}.$$
En déduire un équivalent de $\zeta(s)$ lorsque $s \to 1^+$.

9. (a) Montrer que pour $s > 1$ la série
$$\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right)$$
converge.

   (b) En évaluant ses sommes partielles, montrer que sa somme vaut $\zeta(s)$.

   (c) En déduire la formule
$$\zeta(s) = s\int_1^{\infty} \frac{E(t)}{t^{s+1}}\mathrm{d}t$$
où $E(\cdot)$ désigne la fonction partie entière.

10. Démontrer que pour tout entier $N \geq 2$, on a
$$\int_1^{N} \frac{E(t)-t}{t^2}\mathrm{d}t = H_N - \ln(N) - 1,$$
et en déduire la formule
$$\int_1^{\infty} \frac{E(t)-t}{t^2}\mathrm{d}t = \gamma - 1.$$

11. En justifiant l'égalité $\zeta(s) - \dfrac{s}{s-1} = s\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{E(t)-t}{t^{s+1}}\mathrm{d}t$, conclure que
$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1) \text{ lorsque } s \to 1^+.$$

◇

Exercice 3. Sous-espaces de matrices nilpotentes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels. On rappelle qu'une matrice $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe $k \geq 1$ tel que $N^k = 0$, et on note $\mathrm{N}_n \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices nilpotentes. On identifiera $\mathbb{R}^n$ à l'espace $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes de taille n, et une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé. On note $M^{\top}$ la transposée d'une matrice M.

L'objet de ce problème est de démontrer le théorème suivant, dû à Gerstenhaber.

Théorème. *Si V est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ constitué de matrices nilpotentes, alors*
$$\dim(V) \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

On note T_n^+ (resp. T_n^-) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) et T_n^{++} l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes, c'est-à-dire n'ayant que des 0 sur la diagonale.

1. Montrer que T_n^+, T_n^- et T_n^{++} sont des sous-espaces vectoriels (on pourra se contenter de rédiger les détails pour T_n^+) et préciser leur dimension.

2. Montrer que $\mathrm{T}_n^- \oplus \mathrm{T}_n^{++} = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Pour $1 \leq k \leq n$, on note $E_k = \left\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ \forall i \geq k,\ x_i = 0\right\}$. On note également $E_{n+1} = \mathbb{R}^n$. Soit $A \in \mathrm{T}_n^{++}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

   (a) Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n+1$, on a $u(E_k) \subset E_{k-1}$.

   (b) En déduire que A est nilpotente. On a ainsi montré que $\mathrm{T}_n^{++} \subset \mathrm{N}_n$.

   (c) Montrer que $\mathrm{T}_n^+ \cap \mathrm{N}_n = \mathrm{T}_n^{++}$.

4. N_n est-il un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$?

5. Montrer que si $A \in \mathrm{N}_n$, alors $\mathrm{Tr}(A) = 0$. *(Indication : on pourra étudier les valeurs propres complexes de A.)*

6. Soient A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A, B et $A+B$ sont nilpotentes alors $\mathrm{Tr}(AB) = 0$.

Dans la suite du problème on fixe un sous-espace vectoriel V de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans N_n.

On note π la projection de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sur T_n^{++} parallèlement à T_n^- (qui est bien définie grâce à la question 2). On note également τ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ défini par la transposition, i.e. pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\tau(M) = M^\mathsf{T}$.

7. (a) Montrer que $\dim(V) = \dim(V \cap \mathrm{T}_n^-) + \dim(\pi(V))$.

   (b) En déduire que $\dim(V) = \dim(\tau(V \cap \mathrm{T}_n^-)) + \dim(\pi(V))$.

8. Montrer que $\tau(V \cap \mathrm{T}_n^-)$ est inclus dans T_n^{++}.

9. Soit $A \in \tau(V \cap \mathrm{T}_n^-) \cap \pi(V)$ et on fixe $N \in V$ telle que $A = \pi(N)$.

   (a) Montrer que $A^\mathsf{T} + N$ appartient à V. En déduire que $\mathrm{Tr}(A^\mathsf{T} N) = 0$.

   (b) Montrer que $N - A$ appartient à T_n^- et en déduire que $A(N^\mathsf{T} - A^\mathsf{T}) \in \mathrm{T}_n^{++}$.

   (c) Montrer que $\mathrm{Tr}(AA^\mathsf{T}) = 0$.

   (d) Conclure que $A = 0$.

10. En utilisant les résultats des questions précédentes, démontrer le théorème de Gerstenhaber.

◇

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Rappel : Pour toutes les épreuves, les appareils électroniques (calculatrices, téléphones, traductrices), les casques, et les dictionnaires, ainsi que tout document, sont interdits.

Ce problème est consacré à des questions d'approximation uniforme des fonctions sur un intervalle.

L'espace des fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ est noté $\mathscr{C}([a,b])$.

La transposée d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ est notée $M^\top$ et son rang est noté $\mathrm{rg}(M)$. L'espace vectoriel engendré par une partie A d'un espace vectoriel V est noté $\mathrm{Vect}(A)$. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé on note $\mathrm{d}(x,A) = \inf\{\|x-a\|,\ a \in A\}$ la distance d'un point $x \in E$ à une partie A de E.

Le problème est composé de quatre parties. Les trois premières parties sont indépendantes, et la quatrième utilise les résultats établis dans les parties précédentes. On attachera la plus grande importance au soin, à la clarté et à la précision de la rédaction.

Partie 1 : Déterminant de Cauchy.

On fixe un entier $n \geq 1$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres complexes tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. L'objet de cette partie est de calculer le déterminant de Cauchy

$$D_n = \det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Pour cela on suppose dans un premier temps que les (a_i) sont distincts, de même que les (b_i), et on introduit la fraction rationnelle

$$F(X) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{1}{X+b_1} & \frac{1}{X+b_2} & \cdots & \frac{1}{X+b_n} \end{vmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe un nombre complexe λ tel que $F(X)$ s'écrive sous la forme

$$F(X) = \lambda \frac{(X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_{n-1})}{(X+b_1)(X+b_2)\cdots(X+b_n)}.$$

2. On pose $G(X) = (X+b_n)F(X)$. Montrer que $G(-b_n) = D_{n-1}$ et en déduire une relation entre D_n et D_{n-1}.

3. Conclure que

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i)\prod_{1 \leq i < j \leq n}(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i,j \leq n}(a_i + b_j)},$$

dans le cas où les (a_i) et les (b_i) sont distincts, puis dans le cas général.

Partie 2 : Matrices de Gram.

Dans cette partie on fixe un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire noté $\langle\cdot|\cdot\rangle$ (qui munit donc E d'une structure d'espace préhilbertien). La norme associée est notée $\|\cdot\|$. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est un n-uplet de vecteurs de E on définit la *matrice de Gram* de $(x_1, \dots, x_n)$ par

$$\mathrm{Gram}(x_1, \dots, x_n) = \big(\langle x_i | x_j\rangle\big)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

On pose également $V = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $m = \dim(V)$.

4. Soit $(e_1,\dots,e_m)$ une base orthonormale de V et M la matrice de taille $m\times n$ définie par $M=\big(\langle e_i|x_j\rangle\big)_{1\le i\le m,1\le j\le n}$.

   (a) Montrer que
   $$\mathrm{Gram}(x_1,\dots,x_n)=M^\intercal M.$$

   (b) Montrer que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{Gram}(x_1,\dots,x_n))=\dim V$.

   (c) Montrer que toute valeur propre réelle de $M^\intercal M$ est positive ou nulle.

   (d) En déduire que $\det(\mathrm{Gram}(x_1,\dots,x_n))\ge 0$ avec égalité si et seulement si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille liée.

5. On suppose que la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est libre. Soit $x\in E$ et $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur V. Montrer que
$$\mathrm{d}(x,V)=\sqrt{\frac{\det(\mathrm{Gram}(x,x_1,\dots,x_n))}{\det(\mathrm{Gram}(x_1,\dots,x_n))}}\,.$$
(on pourra considérer le déterminant $\det\big(\mathrm{Gram}(x-p(x),x_1,\dots,x_n)\big)$*)*

Partie 3 : Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass

Dans cette partie on s'intéresse au théorème d'approximation de Weierstrass (1885) : *si* $[a,b]$ *est un intervalle compact de* $\mathbb{R}$, *toute fonction continue de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *est limite uniforme sur* $[a,b]$ *d'une suite de polynômes.*

Pour tous $n\ge 0$ et $0\le k\le n$ on pose $B_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. Cette famille s'appelle la famille des *polynômes de Bernstein.* On note $\mathscr{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus n.

Pour $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$, on considère une suite $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre x : $\mathbb{P}(X_i=1)=x$, $\mathbb{P}(X_i=0)=1-x$. On fixe $f\in\mathscr{C}([0,1])$ et on pose
$$B_n(f)(x)=\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]\ \text{où } S_n=\sum_{i=1}^n X_i.$$

Pour $f\in\mathscr{C}([0,1])$, on définit son module de continuité ω par
$$\omega(\delta)=\sup\left\{\left|f(x)-f(y)\right|,\ (x,y)\in[0,1]^2,\ \left|x-y\right|\le\delta\right\}.$$

6. Montrer que le module de continuité ω est un nombre réel bien défini, et qu'il vérifie
$$\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta)=0.$$

7. Montrer que pour tout $n\ge 0$, la famille $(B_{n,k})_{0\le k\le n}$ est une base de l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

8. Montrer que $B_n(f)$ est un polynôme de degré n, que l'on exprimera en fonction des $B_{n,k}$.

9. Montrer que
$$\left|B_n(f)(x)-f(x)\right| \le \omega(\delta)+2\left\|f\right\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\ge\delta\right)$$
puis que
$$\left|B_n(f)(x)-f(x)\right| \le \omega(\delta)+\frac{\left\|f\right\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

Pour $a<b$ deux nombres réels quelconques, considérons maintenant l'espace $\mathscr{C}([a,b])$ des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles, que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\left\|f\right\|_\infty = \sup_{[a,b]}\left|f\right|$ (on ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'une norme). On fixe $f\in\mathscr{C}([a,b])$.

10. Montrer que pour tout entier $n\ge 1$ il existe un polynôme $T_n(f)$ tel que
$$\left\|f-T_n(f)\right\|_\infty = \mathrm{d}(f,\mathscr{P}_n),$$
où la distance est relative à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

11. En utilisant les polynômes de Bernstein, montrer que $\left\|f-T_n(f)\right\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ainsi nous avons établi le théorème de Weierstrass.

12. On suppose dans cette question que f est lipschitzienne. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout entier $n\ge 1$, $\mathrm{d}(f,\mathscr{P}_n)\le Cn^{-1/3}$.

13. Dans cette question, on se place sur $[a,b]=[-1,1]$ et on considère la fonction valeur absolue $V: x\mapsto V(x)$. On admettra l'inégalité suivante dite des frères Markov (1890) : *si P est un polynôme de degré au plus n, alors sur $[-1,1]$ on a $\left\|P'\right\|_\infty \le n^2\left\|P\right\|_\infty$.*

    (a) Montrer qu'il existe un polynôme *pair* T_n^* tel que $\mathrm{d}(V,\mathscr{P}_n)=\left\|V-T_n^*\right\|$.

    (b) En minorant $\left|T_n^*-T_n^*(0)-V\right|$ sur un voisinage de 0, montrer qu'il existe une constante $c>0$ telle que $\mathrm{d}(V,\mathscr{P}_n)\ge cn^{-4}$.

Partie 4 : Théorème de Müntz.

Pour $\alpha\ge 0$ on se permettra de noter simplement x^α la fonction définie sur $[0,1]$ par $x\mapsto x^\alpha$.

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant, dû à H. Müntz (1914) : *soit $(\lambda_n)_{n\ge 0}$ une suite strictement croissante de nombres réels, telle que $\lambda_0=0$ et V le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}([0,1])$ engendré par la famille de fonctions x^{λ_n}, $n\ge 0$. Alors V est dense dans $(\mathscr{C}([0,1]),\|\cdot\|_\infty)$ si et seulement si la série $\sum_{n\ge 1}\frac{1}{\lambda_n}$ diverge.*

Dans la suite on fixe $(\lambda_n)_{n\ge 0}$ une suite strictement croissante de nombres réels, telle que $\lambda_0=0$.

11. Pour $f\in\mathscr{C}([0,1])$ on pose
$$\left\|f\right\|_2=\left(\int_0^1\left|f(t)\right|^2dt\right)^{1/2}.$$
Vérifier que $\|\cdot\|_2$ définit une norme sur $\mathscr{C}([0,1])$ associée à un produit scalaire que l'on explicitera et que l'on pourra noter $\langle\cdot|\cdot\rangle$ dans la suite.

12. Montrer que $\mathrm{Vect}(\{x^m,\ m\in\mathbb{N}\})$ est dense dans $(\mathscr{C}([0,1]),\|\cdot\|_2)$.

13. Pour $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ comme ci-dessus, démontrer que la famille de fonctions $\left(x^{\lambda_n}\right)$ est libre dans $\mathscr{C}([0,1])$ (on pourra utiliser la question 4).

14. Soit $V_N=\mathrm{Vect}(x^{\lambda_n},\ 0\leq n\leq N)$ et m un réel positif.

    (a) Montrer que
$$d_2(x^m,V_N)=\frac{1}{\sqrt{2m+1}}\prod_{i=0}^{N}\frac{|\lambda_i-m|}{|\lambda_i+m+1|}\ ,$$
    où d_2 désigne la distance associée à la norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathscr{C}([0,1])$.

    (b) Montrer que si la suite (λ_n) est bornée alors $\lim\limits_{N\to\infty} d_2(x^m,V_N)=0$.

    (c) Montrer que si (λ_n) est non-bornée et $m\notin\{\lambda_n,\ n\geq 0\}$ alors
$$\lim_{N\to\infty} d_2(x^m,V_N)=0 \text{ si et seulement si } \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\lambda_n} \text{ diverge.}$$

15. Montrer que V est dense dans $(\mathscr{C}([0,1]),\|\cdot\|_2)$ si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\lambda_n}$ diverge.

16. Montrer que si V est dense dans $(\mathscr{C}([0,1]),\|\cdot\|_\infty)$ alors la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\lambda_n}$ diverge.

17. (a) Prouver que si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ on a
$$\left\|f-g\right\|_\infty\leq\left|f(0)-g(0)\right|+\left\|f'-g'\right\|_2\ .$$

    (b) Conclure que si la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\lambda_n}$ diverge alors V est dense dans $(\mathscr{C}([0,1]),\|\cdot\|_\infty)$.

    (c) Le théorème de Müntz reste-t'il vrai si l'on omet l'hypothèse $\lambda_0=0$?

◇

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h

Le sujet comporte deux problèmes qui peuvent être traités indépendamment. La notation tiendra largement compte de la clarté et de la précision des réponses.

Problème de la ruine du joueur

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de hasard dont le principe est décrit ci-après. On note $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ le montant global (en euro) mis en jeu. Au début de la partie, le joueur A dispose de $i \in \mathbb{N}$ euros. Le joueur B dispose donc de $k-i$ euros. Une tierce personne lance une pièce de monnaie : si elle tombe sur « face », le joueur A prend 1 euro au joueur B sinon, c'est le joueur B qui prend 1 euro au joueur A. Le jeu se termine lorsque l'un des deux joueurs est ruiné. Dans toute la suite du problème on notera $p \in]0,1[$ la probabilité que la pièce tombe sur « face ».
L'objectif est de calculer (en fonction de p, k et i) la probabilité que le joueur A gagne la partie i.e., que le joueur B soit ruiné.

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on note $S_{i,k}^A(\ell)$ le montant dont dispose le joueur A au bout de ℓ lancers avec la condition initiale $S_{i,k}^A(0) = i$. Pour les 3 questions suivantes, on suppose que $k \geq 4$ et $i \in \{2, \cdots, k-2\}$.

1) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $S_{i,k}^A(1)$? Même question pour la variable aléatoire $S_{i,k}^A(2)$.
2) Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_{i,k}^A(2)$.
3) Dans le cas où $p = 1/2$, quelle est l'espérance de $S_{i,k}^A(2)$?

On pose $\tau_{i,k}^A := \min\left\{\ell \in \mathbb{N} \mid S_{i,k}^A(\ell) \in \{0,k\}\right\}$. La probabilité que le joueur A gagne est donc

$$w_{i,k}^A := \mathbb{P}\left(\left[\ S_{i,k}^A\left(\tau_{i,k}^A\right) = k\right]\right).$$

Pour tout $\ell \geq \tau_{i,k}^A$, on a $S_{i,k}^A(\ell) = S_{i,k}^A\left(\tau_{i,k}^A\right) \in \{0,k\}$. Autrement dit, dès lors que le joueur A a gagné ou perdu, le jeu s'arrête et la somme dont dispose le joueur A ne change plus.

4) Quelle est la valeur de la probabilité $w_{0,k}^A$ (i.e., la probabilité que le joueur A gagne s'il dispose de 0 euro en début de partie) ?
5) Quelle est la valeur de la probabilité $w_{k,k}^A$?

Dans les questions 6) à 9), on se place dans le cas simple $i = 2$ et $k = 3$.

6) Calculer la probabilité pour que $\tau_{2,3}^A$ soit égal à 1.
7) Expliquer pourquoi $S_{2,3}^A\left(\tau_{2,3}^A\right) = 3$ si et seulement si $\tau_{2,3}^A$ est impair.
8) Montrer par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\left[\ \tau_{2,3}^A = 2m+1\right]\right) = p^{m+1}(1-p)^m.$$

9) En déduire l'expression (en fonction de p) de $w_{2,3}^A$. Vous vérifierez que lorsque $p = 1/2$

(i.e., pour une pièce équilibrée), le joueur A a 2 chances sur 3 de remporter le jeu.

On se propose à présent de calculer la probabilité $w_{i,k}^A$ dans le cas général. Pour ce faire, on commence par faire l'étude de la suite $(a_{i,r})_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour $r>0$ et tout $i\geq 1$ la relation de récurrence $a_{i+1,r}-a_{i,r}=r(a_{i,r}-a_{i-1,r})$.

10) Pour tout $i\geq 2$, donner l'expression de la fonction $g(i,r)>0$ pour laquelle

$$a_{i,r}-a_{0,r}=g(i,r)\left(a_{1,r}-a_{0,r}\right).$$

(attention au cas $r=1$).

11) Soit $n>1$ un entier. En utilisant la question précédente, montrer que

$$a_{1,r}=\frac{a_{n,r}-a_{0,r}}{g(n,r)}+a_{0,r}.$$

Le calcul de $w_{i,k}^A$ est basé sur la remarque suivante. Pour tout $\ell\in\mathbb{N}$ et $(r_0,\cdots,r_{\ell+1})\in\{0,\cdots,k\}^{\ell+2}$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\left[S_{i,k}^A(\ell+1)=r_{\ell+1}\right]\,\middle|\,\left[S_{i,k}^A(\ell)=r_\ell\right]\cap\cdots\cap\left[S_{i,k}^A(0)=r_0\right]\right)\\&=\mathbb{P}\left(\left[S_{i,k}^A(\ell+1)=r_{\ell+1}\right]\,\middle|\,\left[S_{i,k}^A(\ell)=r_\ell\right]\right).\end{aligned}$$

Ainsi, à partir du $(\ell+1)$-ième lancer, la probabilité que le joueur A gagne la partie ne dépend que de la somme $S_{i,k}^A(\ell)$ dont il dispose après ℓ lancers de la pièce. Autrement dit pour tout $\ell\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $j\in\{0,\cdots,k\}$,

$$\mathbb{P}\left(S_{i,k}^A(\tau_{i,k}^A)=k\,\middle|\,S_{i,k}^A(\ell)=j\right)=\mathbb{P}\left(S_{j,k}^A(\tau_{j,k}^A)=k\right).$$

12) En utilisant l'égalité ci-dessus, justifier la relation de récurrence

$$w_{i,k}^A=p\,w_{i+1,k}^A+(1-p)\,w_{i-1,k}^A,\ \text{ pour tout } i\geq 1.$$

13) En utilisant les réponses aux questions 10), 11) et 12), donner l'expression (en fonction de p, k et i) de la probabilité $w_{i,k}^A$.

14) Vérifier que le résultat ci-dessus coïncide lorsque $i=2$ et $k=3$ à la réponse donnée à la question 9). Vous pourrez dans un premier temps montrer l'égalité ci-dessous qui est vraie pour tout $p\in]0,1[\setminus\{1/2\}$

$$\frac{p^3-(1-p)^3}{p^2-(1-p)^2}=1-p(1-p).$$

Une autre méthode pour estimer la probabilité que le joueur A gagne est de faire l'étude du processus $\{S_{i,k}^A(\ell);\ \ell \in \mathbb{N}\}$. Comme nous l'avons remarqué précédemment, sa loi dépend uniquement des probabilités (appelées « probabilités de transition ») définies pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ par

$$p_{r,s} := \mathbb{P}\left(\left[S_{i,k}^A(\ell+1)=s\right] \,\middle|\, \left[S_{i,k}^A(\ell)=r\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[S_{i,k}^A(1)=s\right] \,\middle|\, \left[S_{i,k}^A(0)=r\right]\right), \quad (r,s) \in \{0,\cdots,k\}^2.$$

La matrice de transition $\mathbf{P}$ est la matrice de dimension $(k+1)\times(k+1)$ dont l'élément de la ligne u et de la colonne v avec $(u,v) \in \{1,\cdots,k+1\}^2$ est $\mathbf{P}_{u,v} := p_{u-1,v-1}$.

15) Quelle est la première ligne de $\mathbf{P}$? La dernière ligne de $\mathbf{P}$?
16) Pour tout $u \in \{2,\cdots,k\}$ donner les expressions, en fonction de p, de $\mathbf{P}_{u,u-1}$, $\mathbf{P}_{u,u+1}$ et $\mathbf{P}_{u,v}$ pour tout $v \notin \{u-1,u+1\}$.
17) On rappelle qu'une matrice stochastique est une matrice dont tous les éléments sont positifs ou nuls et dont la somme des éléments de chaque ligne est égal à 1. La matrice $\mathbf{P}$ est-elle une matrice stochastique ?
18) Pour tout couple $(r,s) \in \{0,\cdots,k\}^2$, donner l'expression, en fonction des probabilités $p_{r,t}$ et $p_{t,s}$ avec $t \in \{0,\cdots,k\}$, de la probabilité

$$\mathbb{P}\left(\left[S_{i,k}^A(\ell+2)=s\right] \,\middle|\, \left[S_{i,k}^A(\ell)=r\right]\right), \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

19) Soit $(u,v) \in \{1,\cdots,k+1\}^2$. A l'aide de la question précédente, expliciter la probabilité donné par l'élément $\mathbf{P}_{u,v}^2$ de la ligne u et de la colonne v de la matrice $\mathbf{P}^2$? De manière plus générale, pour $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, que représente l'élément $\mathbf{P}_{u,v}^m$?
20) La matrice $\mathbf{P}^m$ est-elle une matrice stochastique ? (justifier votre réponse).

On admettra que lorsque $m \to \infty$, la matrice $\mathbf{P}^m$ converge vers la matrice stochastique $\mathbf{Q}$.

21) Comment interprétez vous les éléments de la $(k+1)$-ième colonne de $\mathbf{Q}$? Justifier votre réponse.

Pour les questions suivantes, on considère le cas $k=3$.

22) Donner la matrice de transition $\mathbf{P}$.
23) Pour tout $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, donner la première et la dernière ligne de la matrice $\mathbf{P}^m$.
24) On pose $q := 1-p$. Dans le cas où $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ est pair, montrer par récurrence que la deuxième ligne de $\mathbf{P}^m$ est le vecteur ligne

$$\left(q\sum_{j=0}^{m/2-1}(pq)^j\ ,\ (pq)^{m/2}\ ,\ 0\ ,\ p^2\sum_{j=0}^{m/2-1}(pq)^j\right),$$

et que la troisième ligne est le vecteur ligne

$$\left(q^2 \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j \,,\, 0 \,,\, (pq)^{m/2} \,,\, p \sum_{j=0}^{m/2-1} (pq)^j\right).$$

25) En utilisant la question précédente, donner la deuxième et la troisième ligne de la matrice $\mathbf{P}^m$ lorsque m est impair.
26) Montrer que lorsque $m \to \infty$, la matrice $\mathbf{P}^m$ converge vers la matrice $\mathbf{Q}$ que vous préciserez. Vous vérifierez également que $\mathbf{Q}$ est une matrice stochastique.
27) Avant de commencer le jeu, une tierce personne lance la pièce : si elle tombe sur « face », le joueur A reçoit la somme de 1 euro (et donc le joueur B reçoit 2 euros) sinon il reçoit 2 euros. Calculer la probabilité que le joueur A gagne en fonction de p.

Problème du char d'assaut allemand

Lors de la seconde guerre mondiale, les chars allemands étaient identifiables par un numéro de série visible sur le châssis. Les numéros de série étaient des entiers consécutifs et celui du premier char fabriqué était inconnu. En utilisant simplement les numéros de série des quelques chars capturés, les alliés souhaitaient connaître le nombre de chars d'assaut produits par les allemands.
L'énoncé mathématique de ce problème est le suivant. Soient $s \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $n \in \{1, \cdots, N\}$. Les valeurs s et N sont inconnues. Dans l'ensemble $\{s+1, \cdots, s+N\}$, on tire simultanément n éléments $x_1, \cdots, x_n$. Les valeurs ordonnées correspondantes seront notées $x_{(1)} < \cdots < x_{(n)}$. Le n-uplet $(x_{(1)}, \cdots, x_{(n)})$ peut être vu comme la réalisation d'une variable aléatoire

$$(X_{(1)}, \cdots, X_{(n)}) : (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}) \to (E_n, \mathscr{P}(E_n)),$$

où $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, $E_n = \{(i_1, \cdots, i_n) \in \{1, \cdots, N\}^2 \mid i_1 < \cdots < i_n\}$ et $\mathscr{P}(E_n)$ est la tribu des parties de E_n. En utilisant uniquement les observations $x_{(1)}, \cdots, x_{(n)}$, il s'agit donc de proposer une estimation de l'entier N.

1) A quoi correspondent les entiers s, N et n dans le problème des chars d'assaut ?
2) Quel est le cardinal de l'ensemble E_n ?
3) Quelle est la loi de la variable aléatoire $(X_{(1)}, \cdots, X_{(n)})$? Autrement dit, quelle est la valeur de la probabilité $\mathbb{P}([(X_{(1)}, \cdots, X_{(n)}) = (i_1, \cdots, i_n)])$ où $(i_1, \cdots, i_n) \in E_n$?

Soient $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n \in \{1, \cdots, N\}$ et $m \in \{1, \cdots, n\}$. Une variable aléatoire Y suit une loi **hypergéométrique inverse** de paramètres (N, n, m) (notation : $Y \sim \mathscr{H}(N, n, m)$) si pour tout $i \in \{m, \cdots, N-n+m\}$

$$\mathbb{P}([Y = i]) := \binom{i-1}{m-1}\binom{N-i}{n-m} \bigg/ \binom{N}{n}.$$

La somme des probabilités étant égale à 1, on a

$$\sum_{i=m}^{N-n+m} \binom{i-1}{m-1}\binom{N-i}{n-m} = \binom{N}{n}.$$

4) En utilisant l'égalité ci-dessus et la relation

$$i\binom{i-1}{m-1} = m\binom{i}{m},$$

montrer que si $Y \sim \mathscr{H}(N,n,m)$ alors $\mathbb{E}(Y) = m(N+1)/(n+1)$.

5) Montrer que si $Y \sim \mathscr{H}(N,n,m)$ alors

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{m(N+1)}{(n+1)^2(n+2)}(N-n)(n-m+1).$$

Soit $k \in \{1,\cdots,n\}$. On s'intéresse à la variable aléatoire $X_{(k)}$ qui est la k-ième composante de la variable aléatoire $(X_{(1)},\cdots,X_{(n)})$.

6) Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire $X_{(k)}$?

7) Montrer que $X_{(k)} - s$ suit une loi hyper-géométrique inverse dont vous préciserez les paramètres.

8) Montrer que pour tout $1 \le k < \ell \le n$,

$$\widehat{N}(n,k,\ell) := \frac{n+1}{\ell-k}\left(X_{(\ell)} - X_{(k)}\right) - 1,$$

est un estimateur sans biais de N (i.e., d'espérance N).

9) Quelle est la valeur de l'estimateur $\widehat{N}(n,k,\ell)$ lorsque $n = N$ (i.e., lorsqu'on tire tous les éléments de $\{s+1,\cdots,s+N\}$) ?

Afin de calculer la variance de l'estimateur ci-dessus, on s'intéresse à présent à la loi du couple aléatoire $(X_{(k)}, X_{(\ell)})$ avec $1 \le k < \ell \le n$.
Pour simplifier, on supposera que $s = 0$ dans toute la suite.

10) Justifier l'équivalence : l'événement $[X_{(k)} = i] \cap [X_{(\ell)} = j]$ est non vide si et seulement si $k \le i$, $j - i \ge \ell - k$ et $N - j \ge n - \ell$. Vous pourrez vous aider du schéma ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccc} 1\cdots\cdots\cdots & i & \cdots & j & \cdots\cdots\cdots N \\ \cdots x_{(1)}\cdots & x_{(k)} & \cdots & x_{(\ell)} & \cdots x_{(n)}\cdots \end{array}$$

11) Que faut-il mettre à la place des points d'interrogation pour que

$$E^\star(N,n,k,\ell) = E^\star := \left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \mid k \le i \le ? \text{ et } \ell - k + i \le j \le ?\right\},$$

soit l'ensemble des valeurs prises par le couple $(X_{(k)}, X_{(\ell)})$?

12) Pour tout $(i,j)\in E^\star$, donner l'expression de la probabilité $\mathbb{P}\left([X_{(k)} = i] \cap [X_{(\ell)} = j]\right)$.

13) En déduire que

$$\sum_{(i,j)\in E^\star} \binom{i-1}{k-1}\binom{j-i-1}{\ell-k-1}\binom{N-j}{n-\ell} = \binom{N}{n}.$$

14) Montrer que pour tout $1 \le k < \ell \le n$,

$$\mathbb{E}\left(X_{(k)}(X_{(\ell)} - X_{(k)})\right) = \frac{\ell - k}{n-k+1}\left((N+1)\mathbb{E}(X_{(k)}) - \mathbb{E}(X_{(k)}^2)\right).$$

15) En déduire l'expression de la covariance entre $X_{(k)}$ et $X_{(\ell)}$ lorsque $1 \le k < \ell \le n$. Vous devez donner une expression de la forme $\mathrm{Cov}(X_{(k)}, X_{(\ell)}) = r(n,k,\ell)\mathrm{Var}(X_{(k)})$, où $r(n,k,\ell)$ est à préciser.

16) Utiliser les résultats précédents pour montrer que

$$\mathrm{Var}\left(\widehat{N}(n,k,\ell)\right) = \frac{(N+1)(N-n)}{(\ell-k)^2(n+2)}\left[\, k(n-k+1) + (\ell-2k)(n-\ell+1)\right].$$

Il reste maintenant à choisir les valeurs de k et ℓ avec $1 \le k < \ell \le n$ pour obtenir le « meilleur » estimateur de N. Il paraît naturel d'utiliser la plus grande observation pour estimer au mieux la valeur N. <u>On prend donc $\ell = n$</u>. Reste à choisir $k \in \{1,\cdots,n-1\}$ pour avoir un estimateur avec la plus petite variance $\sigma_n^2(k) := \mathrm{Var}\left(\widehat{N}(n,k,n)\right)$ possible.

17) Après avoir fait l'étude de la fonction $k\in\{1,\cdots,n-1\} \mapsto \sigma_n^2(k)$, que proposez-vous comme choix pour k ?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve de français

Durée : 2h

Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas*, *c'est-à-dire*, *le plus grand*, comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé.

Vous utiliserez la feuille préremplie facilitant le comptage des mots. N'oubliez pas d'ajouter votre N° BÉCÉAS en haut de chaque page.

Nous sommes dans une situation étrange : alors que la persuasion est partout, que ses procédés nous assaillent de toute part, élèves et étudiants ne sont préparés ni à la pratiquer ni à la décoder. Malgré la volonté de quelques enseignants et la ténacité de quelques chercheurs en communication, il n'y a nulle part de véritable programme de sensibilisation à l'argumentation, c'est-à-dire à un convaincre non-manipulatoire.

Car le XXème siècle est témoin d'un paradoxe qui a été peu souligné jusqu'à présent. D'un côté on a vu se développer, d'une manière qui n'a pas de précédent, toute sorte de pratiques de la persuasion. Les batailles idéologiques se sont succédé par vagues, mobilisant des foules immenses. Les ressources de la propagande, de la désinformation, de la manipulation psychologique ont été massivement utilisées tout au long de ce siècle, en période de guerre comme en période de paix. Le développement du secteur marchand, lui aussi sans précédent, se nourrit de l'emprise majeure de la publicité sur les consciences, vaste entreprise de conviction peu regardante sur les moyens qui fait penser au jugement de Roland Barthes : « Parler, et à plus forte raison discourir, ce n'est pas communiquer, comme on le répète trop souvent, c'est assujettir : toute la langue est une rection généralisée. » D'un autre côté, malgré cette présence massive, la parole pour convaincre se déploie dans un vide presque total de réflexion, d'enseignement, de culture, et pour tout dire, d'éthique. Il n'y a pas de véritable « culture du convaincre » à la mesure d'une civilisation qui ne cherche plus les normes du passé et de la tradition les raisons de son destin.

La conséquence de ce paradoxe est que l'exercice de la parole, presque uniquement soumis à la règle de l'efficacité, décline au profit de ses formes les plus manipulatoires. On peut se demander si nous n'assistons pas à un véritable déclin de la parole et de la fonction qu'elle remplit dans le progrès de la civilisation. D'autres périodes de l'histoire humaine ont connu un tel déclin. L'historien romain Tacite se demande, dans un texte écrit aux alentours de l'an 80 si la rhétorique n'est pas en train de disparaître sous ses yeux. « Aujourd'hui, écrit-il, il faut faire court : fini le temps où les orateurs pouvaient s'exprimer librement devant un public attentif et qui prend part aux débats. » Aujourd'hui, dit-il encore, « la culture des orateurs, qui avait nourri la République, ne sert plus à rien : l'Empire s'impose et avec lui la démocratie de la parole disparaît. » Tacite voyait déjà dans l'esthétisation du discours – et la naissance d'un genre, la littérature – la conséquence de cette fin d'une époque inaugurée par Athènes. En restant prudent sur la comparaison, ne vivons-nous pas une période équivalente, où la parole est tout aussi malmenée ? Aujourd'hui aussi, il faut faire court : le « clip » est devenu l'unité de mesure du discours. Le débat vivant est remplacé par des procédures manipulatoires au service le plus souvent d'une pensée unique à l'échelle mondiale. Les nouveaux jeux du cirque, le spectacle télévisuel, sont l'unique sujet de conversation. Mesure-t-on les conséquences sur une société où l'on ne parle plus que de choses que l'on n'a pas vécues, sinon par procuration virtuelle ?

Le premier signe, mais pas le plus visible, du déclin de la parole est la tentative de restriction du champ où elle s'applique. La gigantesque bataille idéologique qui a pour objet d'imposer le libéralisme à l'échelle mondiale, a comme caractéristique de se mener sur un mode manipulatoire. Loin de se présenter comme un choix possible, discutable dans l'espace public, le libéralisme se présente comme une évolution naturelle, une loi à laquelle nous serions soumis. La parole est dessaisie de sa possibilité d'intervention, et l'essentiel de ce qui nous arrive est présenté comme non discutable, échappant à la parole, c'est-à-dire comme un phénomène sur lequel nous n'aurions aucune prise.

Un autre signe du déclin de la parole est l'absence de référence, dans l'espace public, à des normes qui réguleraient l'emploi de tel ou tel type de procédés visant à convaincre. Il est frappant de voir l'absence de disjonction, dans les démocraties modernes, entre l'univers des fins et celui des moyens. Si les fins sont bonnes, alors tous les moyens peuvent être mis à leur service. La fascination pour la technique n'est pas étrangère à ce curieux blanc-seing donné aux moyens de communication. Ainsi, pour ne prendre que cet exemple, la propagande est diabolique lorsqu'elle est au service des régimes totalitaires, mais devient d'une certaine façon respectable lorsqu'elle est mise au service d'idéaux démocratiques. Le sommet de cette confusion entre les fins et les moyens est la publicité moderne. Objet complexe par le mélange des genres qu'elle opère, la publicité reste un formidable outil de manipulation des esprits. Les générations futures jugeront peut-être que nous aurons été de ce point de vue autant sous influence que les habitants des pays totalitaires que nous plaignons d'avoir été irradiés par la propagande. Mais comme la cause est bonne, du moins du point de vue du secteur marchand, les moyens le seraient aussi.

Un autre signe du déclin de la parole est la désaffection des systèmes d'enseignement et de recherche vis-à-vis de ce que Roland Barthes avait qualifié d' « empire rhétorique. » En 1902 disparaissait des programmes d'enseignement français cette matière qui avait été, depuis deux mille cinq cents ans, la base de toute scolarité. Bien sûr, la rhétorique s'était progressivement dégradée, pour n'être plus qu'une coquille en partie vidée du contenu citoyen qu'elle avait à la période classique. Une des fonctions civiques essentielles de l'enseignement ne serait-elle pas de montrer que les grandes valeurs démocratiques ne sont rien si les moyens pour les défendre ne sont pas, eux aussi, au service du recul de la violence et de la construction d'un lien social solidaire, c'est-à-dire respectueux de la relation à autrui ?

Pour obvier à tous ces risques, ne faudrait-il pas réfléchir à cette disjonction entre une éthique des fins et une éthique des moyens, qui partirait du principe que toute parole, quelle qu'elle soit, se corrompt d'être diffusée à l'aide de procédés manipulatoires qui ne respectent ni celui qui émet ni celui qui la reçoit ? Les normes qui permettraient d'opérer une partition entre ce qui relève du respect et ce qui émarge à la violence manipulatoire existent. Déjà la culture grecque de l'argumentation, à peine inventée, les discutait. Depuis cette époque, tout homme politique qui franchit par exemple la ligne rouge de la démagogie sait qu'il le fait. Ces normes, qui sont des normes de civilisation, sont connues de tous. Mais leur portée est atténuée, voire niée dans un climat où le laisser-faire s'applique aussi à la parole et aux procédés de communication.

Tout rappel de ces normes est pris dans la fausse alternative liberté/censure qui est le credo des sociétés libérales. Il en est de ces normes comme de toute parole dans l'espace public : on peut tout dire, tout faire. Toute idée qui trouve preneur serait légitime du fait même qu'elle trouve preneur. C'est ainsi que les lois du marché contaminent jusqu'au monde des idées et des moyens de les communiquer. Il faut rappeler que de la même façon que nous avons renoncé, en signe de civilisation, à l'exercice de la violence et de la vengeance privée, nous avons reconnu, au moment même de la naissance de la démocratie, des normes qui permettent de renoncer à la fin de la violence psychologique que constitue la manipulation de la parole. Il est peut-être temps de les réactiver, d'en souligner l'importance pour la démocratie et de montrer l'intérêt que chaque citoyen pourrait en retirer.

Philippe Breton, Le Culte d'Internet. Une menace pour le lien social ?
La Découverte, collection « Sur le vif », Paris, 2000.

Ce texte comporte environ 1280 mots.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2024

Épreuve d'anglais

Durée : 2h

L'épreuve est constituée de deux parties : un résumé et une traduction. Vous rédigerez ces deux parties sur **deux copies séparées**, sur lesquelles vous indiquerez respectivement « Anglais / résumé » et « Anglais / traduction ».

1 Summarize this text in English in 200 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

Sustainability schemes deployed by business most often ineffective, research reveals
Published in The Conversation.com on December 1, 2023

If you ever wondered what the weather might look like should global average temperatures rise 2C degrees above pre-industrial levels – the critical warming threshold the Paris Agreement seeks to prevent us from reaching – take your mind's eye back to Friday 17 November. That day, for the first time since records began, global surface air temperature briefly reached 2.07C above pre-industrial levels. While this does not mean that we have breached the global climate agreement's target, the frequency at which the mercury jumps over that line raises serious concern.

As this year's global annual climate talks, COP28, unfolds, one could hope that this would shock governments into strengthening their climate goals. But this point in time ought to be a moment of reckoning for companies, too. The data, however, indicates otherwise, as executives lie about their environmental, social and governance (ESG) efforts and cut green spending further.

Thankfully, there are many ways in which companies can change course, starting at an internal level with sustainability schemes. For the stake of clarity, we define the latter as organised initiatives to provide sustainability guidance to companies through principles, frameworks, guidelines, and standards. My recent research with James Demastus assessed 20 of the most used environmental sustainability schemes for their effectiveness in advancing sustainability, including the UN Sustainable Development Goals, the Global Reporting Initiative, and Certified B Corporations.

The United Nations' Sustainable Development Goals (SDG) are among the most famous. By contrast to other schemes, SDGs are country-level initiatives to which businesses can choose to contribute to or not. Companies are free to identify any of the 17 SDG that are aligned with their goals, such as affordable and clean energy, climate action, or sustainable cities and communities, and carry out sustainable practices that will contribute to reaching the global SDG goal. Note that participating companies are not held up to any SDG requirements or accountability frameworks, instead enjoying the warm glow of taking part in a global movement for sustainability.

Sustainability reporting guidelines are another type of scheme. In the EU, annual sustainability reporting is required for all large companies. When a company writes a sustainability report to share its sustainability activities, such as its public commitment to help achieve the SDG, they often use a reporting template, such as the Global Reporting Initiative (GRI). The GRI template has been adopted by more than 10,000 companies worldwide and is the most widely used sustainability reporting framework. The GRI specifies what non-financial information that companies should disclose, such as energy usage, waste production, greenhouse gas emissions, impact on biodiversity, and environmental compliance. However, there are numerous other sustainability reporting templates and it is not mandatory to follow the GRI format.

As an example, Unilever uses the GRI reporting guidelines. In its environmental sustainability disclosure, Unilever's 2021 sustainability report states that it has achieved a 64% reduction in operational carbon emissions and is pursuing a target of zero operational carbon emissions by 2030.

Company sustainability certification standards are another type of scheme. Certified B

Corporation (B Corp) guides companies to prioritise workers, community, and the environment alongside profit. The Body Shop and Tony's Chocolonely are both Certified B Corps. B Lab, the organisation that oversees B Corp certification, reports that Tony's Chocolonely does quite well in meeting the B Corp standards for environmental management, air and climate impacts, and land and biodiversity impacts, but has room for improvement in the area of water impacts.

Our research concluded that all 20 of the commonly used schemes in our study aligned with various forms of weak sustainability that promote incremental sustainability progress and continue to advocate for a growth-oriented economy.

For example, most schemes only consider a company's internal or operational carbon emissions and ignore the supply-chain emissions generated by a company's choice of materials, suppliers, and transit options – which they can account for more than 90% of a company's carbon emissions.

Furthermore, many schemes are vague and offer no guidance on how to reduce operational carbon emissions. Coming back to the three schemes cited at the top of the article, SDG requires countries to "take urgent action" to address climate change, the GRI requires companies to simply calculate and report greenhouse gas emissions, and B Corp certification demands that companies to "take action in accordance with science". In practice, companies are left to navigate the options available and decide on the best course of action.

As a result, companies often take the easy route of buying carbon offsets, which have come under great scrutiny as being worthless or even downright polluting, instead of companies tackling the hard work of reducing internal operational emissions. Aware of such trends, the EU has recently passed legislation that requires companies making climate-related claims to disclose if they are slashing internal operational emissions or relying on carbon offsets.

On a positive note, our research identified five schemes that performed better than others, including frameworks centred on concepts such as the circular economy, doughnut economics or planetary boundaries, and The Natural Step framework, and the certification standard scheme ISO 14001.

The circular economy seeks to minimise companies' carbon footprint by reducing demand for new materials, slash waste and increase products' durability overall. Doughnut economics is a theoretical model that defines maximum ecological limits that we should not exceed and minimum basic social needs that we should meet; the goal is to stay between these two limits to maintain a flourishing and healthy planet and society. Amsterdam, Copenhagen, Brussels, and Berlin are among its early adopters. Meanwhile, the model is proving a harder sell for businesses, who are just beginning to explore how it could help them (re)design business for sustainability.

Planetary boundaries is a framework that identifies nine processes that regulate earth systems, such as climate change and ocean acidification, and researchers quantified those processes to determine the boundaries within which humans can comfortably live. Governments and businesses have taken interest in how to stay within those boundaries and, more importantly, how to prepare for future impacts from breached boundaries. Hitachi has publicly committed to keeping its corporate activities within planetary boundaries with a focus on "growth within the limits".

The Natural Step (TNS) framework was started over 30 years ago in Sweden and was the first to develop a shared definition, vision, principles, framework, and process for companies to begin the sustainability journey. Nike was an early adopter of The Natural Step through its Reuse-a-Shoe program to take back worn shoes for recycling; the program continues today. Scandic Hotels also began its sustainability work under the advisement of The Natural