Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2025

Corrections

Rappel : Les corrigés sont proposés à titre informatif. N'hésitez pas à contribuer et proposer des améliorations en nous contactant : contact@ceas.fr.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Corrigé Session 2025

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2025

Épreuve de mathématiques

Éléments de correction

Problème 1 : Algèbre linéaire

Question 1.

Supposons que $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs propres positives. Montrer que A admet une racine carrée dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction

On écrit $A = P^{-1}DP$ avec $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ et alors $M = P^{-1}D'P$ convient, avec $D' = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2})$

Question 2.

Supposons que $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres non nulles de signes opposés.

Question 2. (a)

Montrer que A admet une racine carrée dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

Correction

Comme les deux valeurs propres de A sont de signes opposés, elles sont distinctes, et donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, $A = P^{-1}DP$ avec $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, où $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Alors $M = P^{-1}D'P$ est une racine carrée complexe de A, avec $D' = \mathrm{diag}(i\sqrt{-\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2})$

Question 2. (b)

Est-ce que A admet une racine carrée dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$?

Correction

La diagonalisation montre que $\det(A) < 0$, donc une racine carrée M de A vérifie $\det(M)^2 < 0$, et donc ne peut pas être réelle.

Question 3.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $B_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. En s'appuyant sur une interprétation géométrique de la matrice B_θ, montrer qu'elle admet une racine carrée dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction

B est la matrice d'une rotation d'angle θ dans le plan euclidien, donc la rotation d'angle $\theta/2$ est une racine carrée de B, soit $N = B_{\theta/2}$.

Question 4.

Supposons maintenant que $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente et que $A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 4. (a)

Montrer que $A^2 = 0$.

Correction

Comme A est nilpotente, toute valeur propre complexe de A doit être nulle, donc son polynôme caractéristique est $\chi_A(X) = X^2$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^2 = 0$.

Question 4. (b)

La matrice A admet-elle une racine carrée dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$?

Correction

Si on avait $A = M^2$, alors on aurait $M^4 = 0$, et donc $M^2 = 0$ par la question précédente. Donc $A = 0$, ce qui est une contradiction.

Question 5.

Supposons maintenant que $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ admet une valeur propre réelle mais n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Question 5. (a)

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une matrice nilpotente non nulle N tels que $A = \lambda I + N$.

Correction

Comme A est réelle, ses valeurs propres complexes sont conjuguées. Comme le polynôme caractéristique admet une racine réelle, sa deuxième racine est réelle et en fait les deux racines sont confondues, sinon A serait diagonalisable. Soit λ cette valeur propre. Comme son polynôme caractéristique est scindé, A est trigonalisable, i.e. $A = P^{-1}TP$, où T est une matrice triangulaire supérieure de la forme $T = \lambda I_2 + N'$, où $N' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec α non nul, sinon A serait diagonalisable. La matrice N' est nilpotente ($(N')^2 = 0$), et finalement $A = \lambda I_2 + N$ avec $N = P^{-1}N'P$ telle que $N^2 = 0$.

Question 5. (b)

En supposant $\lambda > 0$, montrer que A admet une racine carrée dans $M_2(\mathbb{R})$.

Correction

Comme précédemment, il suffit de résoudre le problème pour la forme trigonalisée, et de changer de base. On cherche la racine carrée sous la forme

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & \beta \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Un calcul explicite montre que $\beta = \alpha/2\sqrt{\lambda}$ convient.

Question 5. (c)

On suppose maintenant $\lambda < 0$. La matrice A peut elle être diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

Correction

Non car le polynôme caractéristique de A est $(X-\lambda)^2$, donc si A était diagonalisable (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), sa forme diagonalisée serait λI_2, et donc $A = P^{-1}(\lambda I_2)P = \lambda I_2$ (avec $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$), ce qui n'est pas le cas donc A n'est pas diagonalisable.

Question 5. (d)

Montrer que A n'admet pas de racine carrée dans $M_2(\mathbb{R})$.

Correction

Supposons $A = M^2$ avec $M \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Si μ est valeur propre de B, on a $\mu^2 = \lambda$ donc $\mu = \pm i\sqrt{\lambda}$. Maintenant, M n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$ donc ses valeurs propres sont confondues, donc toutes deux égales à $+i\sqrt{\lambda}$ ou toutes deux égales à $-i\sqrt{\lambda}$. Mais si B est réelle, ses valeurs propres complexes sont conjuguées, contradiction.

Question 6.

On rappelle que $GL_d(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soient A et B deux matrices de $M_d(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $P \in GL_d(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On pose $P = P_1 + iP_2$, avec $P_1, P_2 \in GL_d(\mathbb{R})$.

Question 6. (a)

Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\det(P_1 + xP_2) \neq 0$.

Correction

On considère le polynôme réel $P(X) = \det(P_1 + XP_2)$. Ce polynôme n'est pas nul car $P(i) = \det(P) \neq 0$. Donc pour x réel hors d'un ensemble fini, $P(x) \neq 0$.

Question 6. (b)

Montrer que A et B sont semblables dans $M_d(\mathbb{R})$.

Correction

On prend x comme dans la question précédente. En écrivant la relation $PB = AP$ et en prenant la partie imaginaire, on obtient $P_1B = AP_1$ et $P_2B = AP_2$. Donc $(P_1 + xP_2)B = A(P_1 + xP_2)$, et finalement $B = Q^{-1}AQ$, où $Q = P_1 + xP_2$.

Question 6. (c)

Application : montrer que si une matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ admet une valeur propre complexe de la forme $\alpha + i\beta$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, alors A est semblable sur $\mathbb{R}$ à la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Correction

Comme A est réelle, $\alpha - i\beta$ est aussi valeur propre de A, donc A admet deux valeurs propres complexes distinctes, et donc A est semblable sur $\mathbb{C}$ à la matrice $\mathrm{diag}(\alpha+i\beta, \alpha-i\beta)$. Par ailleurs le polynôme caractéristique de $B := \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ est $(X-\alpha)^2+\beta^2$, donc ses valeurs propres sont $\alpha \pm i\beta$, et donc B est également semblable à $\mathrm{diag}(\alpha + i\beta, \alpha - i\beta)$. Ainsi A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$, et par la question précédente, elles sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Question 7.

Soit $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable sur $\mathbb{C}$. On suppose que toutes les valeurs propres négatives de A sont de multiplicité paire. Montrer que A admet une racine carrée dans $\mathrm{M}_d(\mathbb{R})$.

Correction

A est réelle et diagonalisable sur $\mathbb{C}$, donc en ordonnant convenablement les valeurs propres, elle est semblable sur $\mathbb{C}$ à

$$D_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_q,\mu_1,\dots,\mu_r,\gamma_1,\overline{\gamma_1},\dots\gamma_s,\overline{\gamma_s}),$$

où les λ_i sont positifs ou nuls, les μ_i sont strictement négatifs, et les γ_i sont non réels. D'après la question précédente la matrice $\mathrm{diag}(\gamma_i,\overline{\gamma_i})$ est semblable sur $\mathbb{C}$ à

$$C_i = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\gamma_i) & \mathrm{Im}(\gamma_i) \\ -\mathrm{Im}(\gamma_i) & \mathrm{Re}(\gamma_i) \end{pmatrix}.$$

On montre alors aisément que D_1 est semblable à la matrice par blocs

$$D_2 = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_q,\mu_1,\dots,\mu_r,C_1,\dots,C_s).$$

En outre, comme les valeurs propres négatives sont de multiplicité paire, quitte à les réordonner (ce qui correspond à conjuguer à nouveau D_2), on peut les grouper par paires égales et donc A est semblable sur $\mathbb{C}$, et donc sur $\mathbb{R}$ à la matrice par blocs réelle

$$D_3 = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_q,\mu_1 I_2,\dots,\mu_{r'} I_2,C_1,\dots,C_s).$$

Noter que pour $\mu \neq 0$, μI_2 est aussi une matrice de la forme $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)$, avec $\beta = 0$ et $\alpha \neq 0$

Pour conclure, on remarque que pour tous α, $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\beta \neq 0$, on a

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$, donc elle admet une racine carrée réelle. Ainsi D_3 admet une racine carrée réelle diagonale par blocs de taille 1 et 2, et finalement, A admet une racine carrée réelle.

Problème 2 : analyse.

Soit f une fonction continue sur $]0,+\infty[$. Sous réserve que cette expression ait un sens, on pose pour $x \in \mathbb{R}_+$

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{tf(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

L'objet de ce problème est d'étudier cette transformation et d'en déduire le calcul de certaines intégrales.

Question 1.

Dans cette question on considère la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t^2}$.

Question 1. (a)

Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in]0,+\infty[$. On pose $G(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

Correction

La fonction $tf(t) = \frac{1}{t}\operatorname{Arctan} t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, admet un prolongement par continuité en 0, et tend vers 0 à l'infini. Ainsi pour x fixé la fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}_+$ et est un $O(t^{-3})$ à l'infini, donc l'intégrale converge par le critère de Riemann.

Question 1. (b)

Exprimer F en fonction de G.

Correction

En effectuant le changement de variable $t = xu$ on a pour tout $x > 0$:

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{Arctan} t}{t(x^2+t^2)} = \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xu)}{u(1+u^2)}\,\mathrm{d}u$$

En effectuant le changement de variable $t = xu$. Ainsi $F(x) = \frac{G(x)}{x^2}$.

Question 1. (c)

Montrer avec précision que G est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.

Correction

Fixons $A > 0$ et notons g l'application qui à tout couple (x,t) de $D = [0,A] \times \mathbb{R}_+^*$ associe $\dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$. Alors :

- g est continue sur son domaine de définition D ;
- g est dérivable par rapport x sur D et l'application $(x,t) \longmapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{((1+t^2)(1+x^2t^2)}$ est continue sur D ;
- $\forall (x,t) \in D,\ |g(x,t)| \leq \frac{xt}{t(1+t^2)} \leq \frac{A}{1+t^2} = \phi(t)$ et l'application ϕ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$;
- $\forall (x,t) \in D,\ |\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \psi(t)$ et l'application ψ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de Leibniz, on peut affirmer que G est définie et de classe C^1 sur chaque intervalle $[0, A]$, donc sur $\mathbb{R}_+$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ G'(x) = \int_0^{\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$

Question 1. (d)

Calculer G' et en déduire la valeur de $F(x)$ pour tout x.

Correction

Soit $x \geq 0$ avec $x \neq 1$. Comme $\dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \dfrac{x^2}{x^2-1}\dfrac{1}{1+x^2t^2} - \dfrac{1}{x^2-1}\dfrac{1}{1+t^2}$ (décomposition en éléments simples), on obtient, en remarquant que les deux intégrales convergent :

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{x}{x^2-1}\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^2t^2} - \frac{1}{x^2-1}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+t^2} \\ &= \frac{x}{x^2-1}\Big[\mathrm{Arctan}(xt)\Big]_0^{+\infty} - \frac{1}{x^2-1}\Big[\mathrm{Arctan}(t)\Big]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2(x+1)}. \end{aligned}$$

Par continuité de G, cette égalité est également valable pour $x = 1$.

On en déduit donc que $G(x) = G(0) + \displaystyle\int_0^x G'(y)\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\ln(x+1)$ pour tout $x \geq 0$, puis que

$$F(x) = \frac{\pi\ln(x+1)}{2x^2}$$

pour tout $x > 0$.

Question 1. (e)

Montrer que la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{\mathrm{Arctan}\, t}{t}\right)^2$ est intégrable sur $[0,\infty[$ et utiliser ce qui précède pour déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{Arctan}\, t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t.$$

Correction

La fonction considérée est continue sur $]0, +infty[$, a une limite finie en 0 et est un $O(1/t^2)$ au voisinage de $+infty$. Elle est donc intégrable sur $]0, +\infty[$. Pour $\epsilon > 0$ et $A > \epsilon$, en intégrant par parties, nous avons :

$$\int_{\epsilon}^{A}\left(\frac{\mathrm{Arctan}\, t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{Arctan}^2\, t}{t}\right]_{\epsilon}^{A} + 2\int_{\epsilon}^{A}\frac{\mathrm{Arctan}\, t}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

En faisant tendre ϵ vers 0 et A vers $+\infty$, nous obtenons :

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{Arctan}\, t}{t}\right)^2 = 2\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{Arctan}\, t}{t(1+t^2)} = 2F(1) = \pi\ln 2.$$

Question 2.

Dans cette question on considère la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{\cos t}{t}$.

Question 2. (a)

Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in]0,+\infty[$.

Correction

Pour $x > 0$, la fonction à intégrer est continue sur $[0,\infty[$ et est un $O(t^{-2})$ en $+\infty$ donc elle est intégrable sur $[0,\infty[$ et F est donc bien définie pour $x > 0$.

Question 2. (b)

On pose H la fonction définie par $H(x) = xF(x)$. Montrer que la fonction H est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et que $\lim\limits_{x\to 0} H(x) = \dfrac{\pi}{2}$. (On pourra penser au changement de variable $t = ux$).

Correction

En posant $t = ux$, on obtient $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ux)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$. En outre pour tout $x \geq 0$ on a $\left|\dfrac{\cos(ux)}{1+u^2}\right| \leq \left|\dfrac{1}{1+u^2}\right|$, ce qui montre que l'intégrale définissant H est convergente, et que les hypothèses du théorème de convergence dominée sont satisfaites.

Ainsi quand x tend vers 0, $H(x)$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$. Egalement, pour tout $x > 0$ on a $|H(x)| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \pi/2$, et la fonction H est bornée.

Question 2. (c)

Démontrer que F est de classe C^2 sur $]0,\infty[$.

Correction

On a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+t^2}\right) = -\frac{2t}{(x^2+t^2)^2} \text{ et } \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{x^2+t^2}\right) = \frac{8xt}{(x^2+t^2)^3}.$$

Fixons $\epsilon > 0$ et $A > \epsilon$. On peut appliquer deux fois le théorème de Leibniz à l'application φ sur l'intervalle $[\epsilon, A]$:

- l'application $\psi : (x,t) \longmapsto \dfrac{\cos t}{x^2+t^2}$ est continue et deux fois dérivable par rapport à x sur $[\epsilon, A] \times [0,+\infty[$;
- les applications $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ sont continues sur $[\epsilon, A] \times [0,+\infty[$;
- $\forall (x,t) \in [\epsilon, A] \times [0,+\infty[$, on a les propriétés de domination :

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{-2t\cos t}{(x^2+t^2)^2}\right| \leq \frac{2t}{(\epsilon^2+t^2)^2} = \psi_1(t)$$

$$\left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x,t)\right| = \left|\frac{8xt\cos t}{(x^2+t^2)^2}\right| \leq \frac{8At}{(\epsilon^2+t^2)^3} = \psi_2(t)$$

  où ψ_1 et ψ_2 sont continues et intégrables sur $[0,+\infty[$.

Ainsi F est de classe C^2 sur chaque intervalle $[\epsilon, A]$, donc sur $]0,+\infty[$, avec pour tout $x > 0$:

$$F'(x) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+t^2}\right)\cos t\,\mathrm{d}t,$$

$$F''(x) = \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{x^2+t^2}\right)\cos t \,\mathrm{d}t.$$

Noter que l'énoncé ne demande pas de calculer ces expressions.

Question 2. (d)

En admettant la relation (que l'on ne demande pas de démontrer)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) = 0,$$

établir que H est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Correction

Comme $H(x) = xF(x)$, H est aussi de classe C^2, et dans l'expression $H(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\cos t \,\mathrm{d}t$, par la question précédente on peut dériver sous le signe somme et obtenir pour tout $x \in]0, \infty[$,

$$H''(x) = \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\cos t \,\mathrm{d}t.$$

En utilisant la relation donnée par l'énoncé et en intégrant deux fois par parties, nous obtenons ensuite, pour tous $A > 0$ et $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{A} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\cos t \,\mathrm{d}t &= -\int_0^{A} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\cos t \,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\cos t\right]_0^A - \int_0^{A} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\sin t \,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\cos t - \frac{x}{x^2+t^2}\sin t\right]_0^A + \int_0^{A} \frac{x}{x^2+t^2}\cos t \,\mathrm{d}t \\
&= \left[-2\frac{tx}{(x^2+t^2)^2}\cos t - \frac{x}{x^2+t^2}\sin t\right]_0^A + \int_0^{A} \frac{x}{x^2+t^2}\cos t \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

et en faisant tendre A vers $+\infty$ on conclut que $H'' = H$ sur $]0, \infty[$.

Question 2. (e)

En déduire l'expression de F.

Correction

Il existe donc deux réels α et β tels que $H(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$ pour tout $x > 0$. Comme H est bornée sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $\alpha = 0$.

La propriété que H tend vers $\pi/2$ en 0 donne $\beta = \pi/2$, soit :

$$H(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}, \text{ et } F(x) = \frac{\pi}{2x}e^{-x}$$

pour tout $x > 0$.

Problème 3 : probabilités

Dans tout ce problème, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires considérées. L'espérance d'un évènement $A \in \mathscr{A}$ sera notée $\mathbb{E}(A)$ et sa probabilité sera notée $\mathbb{P}(A)$.

On pourra utiliser sans démonstration le lemme de Borel-Cantelli : si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'évènements tels que la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors pour presque tout ω, on a $\omega \notin A_n$ pour n assez grand.

Soit Z une variable aléatoire réelle discrète. On note (M) la condition

$$\text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \mathbb{E}\left(e^{\alpha|Z|}\right) \text{ est finie.} \tag{M}$$

On admettra que si (M) est satisfaite alors l'espérance $\mathbb{E}(|Z|)$ est finie, et on définit alors

$$\psi_Z(\lambda) = \ln\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda(Z-\mathbb{E}(Z))}\right)\right).$$

Question 1.

Montrer que si la variable aléatoire Z est bornée, la condition (M) est satisfaite.

Correction

Z est une variable aléatoire discrète prenant les valeurs z_k, $k \geq 0$. Ainsi on a pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{E}\left(e^{\alpha|Z|}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha|z_k|}\mathbb{P}(Z = z_k) \leq e^{\alpha M} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z = z_k) = e^{\alpha M}$$

où M est tel que $|Z| \leq M$, et le résultat suit.

Question 2.

On suppose que Z suit une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$. Montrer que la condition (M) est satisfaite et déterminer la fonction ψ_Z.

Correction

Si $Z \sim \mathscr{P}(\theta)$ on a $\mathbb{P}(Z = k) = \frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}$ et donc

$$\mathbb{E}\left(e^{\alpha|Z|}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha k}\frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta},$$

qui converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\theta > 0$ par la règle de D'Alembert.

Pour le calcul de ψ_Z, on calcule déjà

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{(k-1)!}e^{-\theta} = \theta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta} = \theta.$$

Puis

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda Z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\lambda k}\frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta} = e^{\theta e^{\lambda}}e^{-\theta}$$

et finalement

$$\psi_Z(\lambda) = \ln\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda(Z-\mathbb{E}(Z))}\right)\right) = \ln\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda Z}\right)\right) - \lambda\mathbb{E}(Z) = \theta(e^{\lambda} - 1) - \lambda\theta = \theta(e^{\lambda} - 1 - \lambda),$$

où la deuxième égalité découle de la linéarité de l'espérance.

Question 3.

On suppose que Z est une variable aléatoire satisfaisant la condition (M). Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a
$$\mathbb{P}\big(Z - \mathbb{E}(Z) \geq t\big) \leq e^{-(\lambda t - \psi_Z(\lambda))}.$$

Correction

Comme $t \mapsto e^{\lambda t}$ est strictement croissante, par l'inégalité de Markov on a :
$$\mathbb{P}\left(Z - \mathbb{E}(Z) \geq t\right) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda(Z-\mathbb{E}(Z))} \geq e^{\lambda} t\right) \leq e^{-\lambda t}\mathbb{E}\left(e^{\lambda(Z-\mathbb{E}(Z))}\right) = e^{-\lambda t + \psi_Z(\lambda)}$$

Question 4.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par
$$g(x) = \ln(\operatorname{ch}(x)) - \frac{x^2}{2},$$
où ch désigne la fonction cosinus hyperbolique : $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Question 4. (a)

Montrer que la fonction g est concave.

Correction

Comme $\operatorname{ch} \geq 1$, la fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ par les théorèmes usuels. En utilisant $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ on écrit
$$g'(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} - x$$
puis
$$g''(x) = \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} - 1 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} - 1 \leq 0$$
.

Ainsi, g est concave.

Question 4. (b)

En déduire que pour tout $x \geq 0$ on a $\operatorname{ch}(x) \leq e^{x^2/2}$.

Correction

g' est décroissante et $g'(0) = 0$ donc $g' \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g(0) = 0$ on a donc $g \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et le résultat suit.

Question 5.

Soient c un réel strictement positif et X une variable aléatoire réelle discrète satisfaisant $\mathbb{E}(X) = 0$ et $|X(\omega)| \leq c$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Question 5. (a)

Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y à valeurs dans $[0,1]$ telle que $X = -cY + c(1-Y)$, et déterminer $\mathbb{E}(Y)$.

Correction

On pose simplement $Y = -\frac{1}{2c}X + \frac{1}{2}$. Comme pour tout $\omega \in \Omega$ on a $X(\omega) \in [-c, c]$, on obtient $-X(\omega)/2c \in [-1/2, 1/2]$ puis $Y(\omega) \in [0,1]$.

Par linéarité de l'espérance on a $\mathbb{E}(Y) = -\frac{1}{2c}\mathbb{E}(X) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Question 5. (b)

Démontrer que pour tout $\lambda \geq 0$, on a $e^{\lambda X} \leq Ye^{-c\lambda} + (1-Y)e^{c\lambda}$. (On pourra utiliser un argument de convexité.)

Correction

Pour $\omega \in \Omega$ fixé on écrit $\lambda X(\omega) = Y(\omega)(-c\lambda) + (1 - Y(\omega))(c\lambda)$ et par convexité de la fonction exponentielle et le fait que $Y(\omega) \in [0,1]$ on a pour tout ω :

$$e^{\lambda X(\omega)} \leq e^{Y(\omega)(-c\lambda)+(1-Y(\omega))(c\lambda)} \leq e^{-c\lambda}Y(\omega) + e^{c\lambda}(1 - Y(\omega)).$$

Question 5. (c)

Conclure que pour tout $\lambda \geq 0$, on a $\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) \leq \operatorname{ch}(c\lambda)$.

Correction

On prend l'espérance dans l'inégalité de la question précédente et on obtient :

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) \leq e^{-c\lambda}\mathbb{E}(Y) + e^{c\lambda}\mathbb{E}(1-Y) = \frac{1}{2}e^{-c\lambda} + \frac{1}{2}e^{c\lambda} = \operatorname{ch}(c\lambda), \text{ car } \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}.$$

Question 6.

On considère maintenant une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et $|X_n| \leq c_n$, où $c_n \in \mathbb{R}_+^*$. On pose S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Question 6. (a)

Montrer que pour tout $\lambda \geq 0$ on a $\mathbb{E}\left(e^{\lambda 0.S_n}\right) \leq e^{\frac{\lambda^2 v_n}{2}}$, où l'on a noté $v_n = \sum_{k=1}^{n} c_k^2$.

Correction

L'indépendance des variables X_n implique que

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda S_n}\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda X_k\right)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{\lambda X_k}\right).$$

.

D'après les questions 5c et 4b, on a :

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda X_k}\right) \leq \operatorname{ch}(\lambda c_k) \leq \exp\left(\frac{(\lambda c_k)^2}{2}\right),$$

D'où :

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda S_n}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{\lambda X_k}\right) \leq \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{(\lambda c_k)^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2}{2}\right).$$

Question 6. (b)

En déduire que pour tout $t \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2v_n}}.$$

Correction

On applique la croissance de l'exponentielle et l'inégalité de Markov (ou alors directement la question 3) pour obtenir

$$\mathbb{P}(S_n \geq t) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda t}\right) \leq e^{-\lambda t}\mathbb{E}\left(e^{\lambda S_n}\right) = e^{\frac{\lambda^2 v_n}{2} - \lambda t}$$

pour tout $\lambda \geq 0$.

En appliquant cette inégalité à $\lambda = t/v_n$ on obtient

$$\mathbb{P}(S_n \geq t) \leq e^{-\frac{t^2}{2v_n}}.$$

En répétant ce raisonnement pour la suite de variables aléatoires $-X_n$ qui vérifie les mêmes hypothèses, on déduit $\mathbb{P}(S_n \leq -t) \leq e^{-t^2/2v_n}$, et finalement

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq t) = \mathbb{P}(S_n \geq t) + \mathbb{P}(S_n \leq -t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2v_n}}.$$

Question 6. (c)

On suppose que $c_n \leq Cn^{\alpha}$ pour une certaine constante $C > 0$ et un réel $\alpha \geq 1$. Montrer qu'il existe une constante $D \in \mathbb{R}$ telle que $v_n \leq Dn^{2\alpha+1}$.

Correction

Par croissance de la fonction $x \mapsto x^{2\alpha}$ et en utilisant l'inégalité $n+1 \leq 2n$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha} \leq \int_1^{n+1} x^{2\alpha}\,dx = \frac{(n+1)^{2\alpha+1} - 1}{2\alpha+1} \leq \frac{2^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} n^{2\alpha+1}$$

.

Le résultat suit.

Question 6. (d)

Conclure que si $\beta > \frac{\alpha+1}{2}$ est fixé, alors pour presque tout $\omega \in \Omega$, pour tout n assez grand on a $|S_n| \leq n^{\beta}$.

Correction

En utilisant les question 6b et 6c on estime

$$\mathbb{P}\left(|S_n| \geq n^\beta\right) \leq 2e^{-\frac{n^{2\beta}}{2v_n}} \leq 2e^{-\frac{n^{2\beta}}{2Dn^{2\alpha+1}}} = 2e^{-\frac{1}{2D}n^{2(\beta-(\alpha+1)/2)}}.$$

Comme $\beta > (\alpha+1)/2$ le membre de droite est le terme général d'une série convergente : appliquer le critère de Riemann et les croissances comparées. Ainsi la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(|S_n| \geq n^\beta\right)$ converge et le résultat découle du lemme de Borel-Cantelli.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2025

Épreuve de mathématiques

Éléments de correction

Ce problème porte sur la notion de matrice de Hadamard. Les quatre parties sont largement indépendantes, même si les résultats principaux des parties 1 et 2 seront utilisés dans les parties 3 et 4.

Une démonstration du thèorème spectral

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et la norme euclidienne est notée $\|\cdot\|$. On identifiera si besoin $\mathbb{R}^n$ avec l'ensemble des vecteurs colonnes $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Étant donnée une matrice $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ on note $M_{i,j}$ le coefficient d'indice (i, j) de M et ${}^{\mathrm{t}}M$ la transposée de M.

Si besoin, on pourra utiliser sans démonstration le fait que l'application

$$M \mapsto |||M||| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} M_{i,j}^2\right)^{1/2}$$

définit une norme sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle que $O_n(\mathbb{R})$ désigne le groupe des matrices orthogonales de taille n, c'est à dire l'ensemble des matrices des isométries vectorielles.

L'objet de cette partie est de fournir une démonstration du théorème spectral, c'est à dire du fait que toute matrice symétrique est diagonalisable en base orthonormale. Soit $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

Question 1.

Montrer l'équivalence entre les conditions :

(i) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a $\|AX\| = \|X\|$;

(ii) Pour tous $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ on a $\langle AX, AY\rangle = \langle X, Y\rangle$;

(iii) ${}^{\mathrm{t}}AA = I_n$.

Correction.

D'après (i) on a pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\|^2 = \|X\|^2$. On applique l'identité de polarisation

$$\langle X, Y| = \frac{1}{2}\left(\|X+Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2\right)$$

et donc pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$ on a $\langle AX, AY| = \langle X, Y|$, soit (ii).

Si maintenant on suppose que (ii) est vraie, on a pour tous X, Y, $\langle AX, AY| = \langle {}^{\mathrm{t}}AAX, Y| = \langle X, Y|$. Donc pour tout X le vecteur ${}^{\mathrm{t}}AAX - X$ est orthogonal à $\mathbb{R}^n$ et donc ${}^{\mathrm{t}}AAX = X$ et ${}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{id}$.

Réciproquement on a facilement (iii)⇒(ii)⇒(i).

Question 2.

Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous ensemble compact de $M_n(\mathbb{R})$.

Correction.

On rappelle que $O_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : {}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{Id}\right\}$. Or l'application $A \mapsto {}^{\mathrm{t}}AA$ de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui même est continue car polynomiale, donc $O_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque du fermé $\{\mathrm{Id}\}$ et est donc fermé.

Pour vérifier que celui-ci est borné, par équivalence des normes on peut choisir n'importe quelle norme sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, par exemple la norme L^2 sur les coefficients. Comme les colonnes d'une matrice orthogonale sont de norme euclidienne 1, la norme de la matrice est n, et donc uniformément bornée.

Ainsi $O_n(\mathbb{R})$ est fermé borné dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, donc compact.

Question 3.

On pose ϕ l'application de $O_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$\phi(P) = \sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\neq j}} \left((P^{-1}AP)_{i,j}\right)^2.$$

Justifier que $\phi(P) = 2\sum_{1\le i<j\le n}\left((P^{-1}AP)_{i,j}\right)^2$ et montrer que ϕ atteint son minimum sur $O_n(\mathbb{R})$.

Correction.

Comme $P \in O_n(\mathbb{R})$ on a $P^{-1} = {}^{\mathrm{t}}P$, donc la matrice $P^{-1}AP = {}^{\mathrm{t}}PAP$ est symétrique. Ainsi la somme est symétrique en i, j et vaut donc le double de la somme sur $i < j$, comme annoncé. Ensuite, toujours en utilisant le fait que $P^{-1} = {}^{\mathrm{t}}P$, l'application ϕ est polynomiale en les coefficients de P, donc continue.

On pose ϕ l'application de $O_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$\phi(P) = \sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\neq j}} \left((P^{-1}AP)_{i,j}\right)^2.$$

Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact, la fonction ϕ étant continue sur ce compact, elle atteint son minimum.

Question 4.

Pour $\theta \in [0,2\pi]$ et r, s des entiers appartenant à $\{1,\dots,n\}$ tels que $r < s$, on pose $Q = Q(r,s,\theta)$ la matrice telle que

$$Q_{r,r} = Q_{s,s} = \cos\theta,\ Q_{r,s} = -Q_{s,r} = \sin\theta,\ Q_{i,i} = 1 \text{ pour } i \notin \{r,s\} \text{ et } Q_{i,j} = 0 \text{ sinon.}$$

Question 4. (a)

Montrer que Q appartient à $O_n(\mathbb{R})$.

Correction.

On vérifie immédiatement que les colonnes de $Q_{r,s}$ sont de norme 1, et si on note C_i la i^{e} colonne, on a $\langle C_i, C_j| = 0$: en effet si $(i, j) \neq (r, s)$ les colonnes i et j n'ont pas de ligne non nulle commune, et si $(i, j) = (r, s)$ on a

$$\langle C_r, C_s| = \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta = 0.$$

Question 4. (b)

On pose $B = Q^{-1}AQ$. Calculer $B_{i,j}$ en distinguant les cas suivants :

- $i, j \notin \{r, s\}$
- $(i \notin \{r, s\},\ j = r)$ et $(i \notin \{r, s\},\ j = s)$
- $(i, j) = (r, s)$.

Correction.

Si i et j n'appartiennent pas à $\{r, s\}$, tous calculs faits on trouve

- $B_{i,j} = A_{i,j}$
- $B_{i,r} = A_{i,r} \cos\theta - A_{i,s} \sin\theta$
- $B_{i,s} = A_{i,r} \sin\theta + A_{i,s} \sin\theta$
- $B_{r,s} = \cos\theta \sin\theta(A_{r,r} - A_{s,s}) + A_{r,s}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

Question 4. (c)

En déduire que $\phi(Q) = \phi(I_n) + 2(B_{r,s}^2 - A_{r,s}^2)$.

Correction.

On a pour $i, j \notin \{r, s\}$ $B_{i,j}^2 = A_{i,j}^2$ et par ailleurs

$$B_{k,r}^2 + B_{k,s}^2 = (A_{k,r} \cos\theta - A_{k,s} \sin\theta)^2 + (A_{k,r} \sin\theta + A_{k,s} \sin\theta)^2 = A_{k,r}^2 + A_{k,s}^2.$$

Ainsi

$$\phi(Q) = 2\sum_{i<j} B_{i,j}^2 = 2 \sum_{i<j, i, j \notin \{r,s\}} B_{i,j}^2 + 2 \sum_{i \notin \{r,s\}} (B_{i,r}^2 + B_{i,s}^2) + 2B_{r,s}^2 = \phi(I_n) + 2(B_{r,s}^2 - A_{r,s}^2)$$

Question 5.

Montrer que si la matrice A $\phi(I_n) > 0$, il existe $(r, s, \theta) \in \{1, \dots, n\}^2 \times [0, 2\pi]$ et Q comme précédemment tels que $\phi(Q) < \phi(I_n)$.

Correction.

On a $\phi(I_n) > 0$ si et seulement s'il existe $r < s$ tels que $A_{r,s} \neq 0$, c'est à dire que la matrice A n'est pas diagonale. D'après la question précédente, on a $\phi(Q) = \phi(I_n) + 2(B_{r,s}^2 - A_{r,s}^2)$.

Or pour $\theta = 0$ on a $B_{r,s} = A_{r,s}$ et pour $\theta = \pi/2$ on a $B_{r,s} = -A_{r,s}$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta_0 \in [0, \pi/2]$ tel que $B_{r,s} = 0$, et pour ce choix de θ_0 on a $\phi(Q) < \phi(I_n)$.

Question 6.

Utiliser ce qui précède pour démontrer que toute matrice symétrique est diagonalisable en base orthonormale.

Correction.

Soit A une matrice symétrique et $P_0 \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ϕ atteint son minimum en P_0.

Supposons par l'absurde que $\phi(P_0) > 0$. Quitte à remplacer A par $P_0^{-1} A P_0$, on peut supposer que $A = I_n$.

Dans ce cas la question précédente fournit $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $\phi(Q) < \phi(I_n)$, ce qui est une contradiction. Ainsi $\phi(P_0) = 0$, i.e. $P_0^{-1} A P_0$ est diagonale, et comme P_0 est une matrice orthogonale, le théorème est démontré.

Inégalité de Hadamard

On rappelle qu'une matrice symétrique est dite positive si ses valeurs propres sont positives ou nulles, et définie-positive si celles-ci sont strictement positives. On rappelle également qu'une matrice symétrique est positive (resp. strictement positive) si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ différent de 0, on a $\langle AX, X| \geq 0$ (resp. $\langle AX, X| > 0$).

Question 1.

Démontrer l'inégalité arithmético-géométrique :

Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, on a

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

Correction.

Si l'un des x_i est nul alors l'inégalité est évidente. On peut donc supposer que tous les x_i sont strictement positifs. En passant au logarithme, qui est une fonction croissante, l'inégalité à démontrer est équivalente à

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \leq \ln \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

qui est une conséquence directe de la concavité de la fonction ln.

Pour le cas d'égalité, on voit que si l'un des x_i est nul on a égalité si et seulement si tous les x_i sont nuls. Sinon, la dérivée seconde étant $-1/x^2 < 0$, le log est strictement concave et on a donc égalité si et seulement si les x_i sont égaux.

Question 2.

Montrer que si B est une matrice symétrique positive on a $\det(B) \leq \left(\frac{\mathrm{Tr}(B)}{n}\right)^n$ et caractériser le cas d'égalité.

Correction.

D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}BP = D$ est diagonale. Comme la trace et le déterminant sont invariants par conjugaison matricielle, on a $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(D)$ et $\det(B) = \det(D)$. Par hypothèse tous les coefficients de D sont positifs. L'inégalité arithmético-géométrique de la question précédente dit alors que $\det(D)^{1/n} \leq \mathrm{Tr}(D)/n$, ce qui est le résultat demandé.

On a égalité si et seulement si tous les coefficients de D sont égaux, c'est à dire que $D = \lambda I_n$ pour un $\lambda \geq 0$, ce qui équivaut à $B = \lambda I_n$.

Question 3.

L'objet de cette question est de démontrer que si S est une matrice symétrique définie positive, on a

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} S_{i,i}.$$

Question 3. (a)

Montrer que si S est définie positive, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $S_{i,i} > 0$.

Correction.

Si S est une matrice symétrique définie positive, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a $\langle SX, X| > 0$. En effet en écrivant $S = {}^{\mathrm{t}}PDP$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ on a
$$\langle SX, X| = \langle {}^{\mathrm{t}}PDPX, X| = \langle DPX, PX| = \langle DY, Y|, \text{ avec } Y = PX$$
et ce dernier terme est clairement positif.

Par ailleurs on a $S_{i,i} = \langle SE_i, E_i|$, où E_i est le i^{e} vecteur de la base canonique, et on conclut.

Question 3. (b)

On pose D la matrice diagonale telle que pour $1 \leq i \leq n$, $D_{i,i} = (S_{i,i})^{-1/2}$. Déterminer DSD et vérifier que DSD est symétrique et définie positive.

Correction.

Par calcul direct on trouve $(DSD)_{i,j} = D_{i,i}D_{j,j}S_{i,j} = S_{i,i}^{-1/2}S_{j,j}^{-1/2}S_{i,j}$.

Question 3. (c)

Démontrer l'inégalité indiquée, et caractériser le cas d'égalité.

Correction.

D'après la question 9a il suffit de démontrer l'inégalité quand S est définie positive. En outre, la matrice DSD est symétrique par la question précédente, et positive car pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a $\langle DSDX, X| = \langle S(DX), (DX)| \geq 0$. Donc on peut lui appliquer l'inégalité de la question 8, c'est à dire que $\det(DSD) \leq \operatorname{Tr} DSD/n^n$.

Mais tous les coefficients diagonaux de DSD valent 1, donc $\operatorname{Tr}(DSD) = n$ et cette inégalité se réduit à $\det(DSD) = \det(D)^2 \det(S) \leq 1$. Comme $\det(D)^2 = \left(\prod_{i=1}^n S_{i,i}\right)^{-1}$, l'inégalité est démontrée.

Pour le cas d'égalité, on a égalité si et seulement si on a l'égalité $\det(DSD) = 1$ ce qui d'après la question 8 est équivalent à $DSD = I_n$, ce qui est équivalent à dire que S est diagonale.

Question 4.

Soit maintenant $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible quelconque.

Question 4. (a)

Montrer que la matrice ${}^{\mathrm{t}}AA$ est symétrique définie positive.

Correction.

On a ${}^{\mathrm{tt}}AA = {}^{\mathrm{t}}AA$ donc ${}^{\mathrm{t}}AA$ est symétrique. En outre, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$ on a $\langle {}^{\mathrm{t}}AAX, X| = \|AX\|^2 > 0$ donc A est définie positive.

Question 4. (b)

En utilisant les questions précédentes, démontrer l'inégalité de Hadamard
$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \|C_i\|,$$
où les C_i sont les vecteurs colonnes de A.

Correction.

Si on pose $S = {}^{\mathrm{t}}AA$ on a $S_{i,j} = \langle C_i, C_j|$, donc l'inégalité de la question 9 dit que $\det({}^{\mathrm{t}}AA) \leq \prod_{i=1}^{n} \langle C_i, C_i| = \prod_{i=1}^{n} \|C_i\|^2$. Or $\det({}^{\mathrm{t}}AA) = \det A^2$, on a donc bien le résultat voulu $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|C_i\|$.

Question 4. (c)

Montrer que cette inégalité est une égalité si et seulement si les colonnes de A sont orthogonales.

Correction.

On a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si $\det({}^{\mathrm{t}}AA) = \prod_{i=1}^{n} \langle C_i, C_i|$, et d'après la caractérisation du cas d'égalité à la question 9c, ceci a lieu si et seulement si la matrice ${}^{\mathrm{t}}AA$ est diagonale, c'est à dire que pour $i \neq j$, $({}^{\mathrm{t}}AA)_{i,j} = \langle C_i, C_j| = 0$, i.e. les colonnes sont orthogonales.

Matrices de Hadamard

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose

$$\mathscr{E}_n = \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) : \forall (i,j) \in \{1, \dots n\}^2, \left|A_{i,j}\right| \leq 1 \right\},$$

$$\mathscr{E}_n^+ = \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) : \forall (i,j) \in \{1, \dots n\}^2, \left|A_{i,j}\right| = 1 \right\}$$

et $\mathscr{H}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{E}_n^+$ dont les colonnes sont orthogonales. Par définition, $\mathscr{H}_n$ est l'ensemble des matrices de Hadamard de taille n.

On s'intéresse au problème suivant : déterminer le maximum de la fonction déterminant sur $\mathscr{E}_n$. On note

$$m_n = \max\{\det(A),\ A \in \mathscr{E}_n\}.$$

Question 1.

Montrer que la fonction déterminant atteint son maximum sur $\mathscr{E}_n$, et que celui-ci est atteint sur $\mathscr{E}_n^+$.

(Indication : pour cela, étant donnée $A \in \mathscr{E}_n$, on pourra considérer pour (i_0, j_0) fixé la matrice $A + tE_{i_0,j_0}$, où $(E_{i,j})$ désigne la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$)

Correction.

L'ensemble $\mathscr{E}_n$ est clairement fermé et borné dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, donc compact. La fonction déterminant est continue sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, car polynomiale, donc elle atteint son maximum sur ce compact.

Pour la deuxième partie de la question, montrons la propriété suivante : pour tout $A \in \mathscr{E}_n$, il existe $A' \in \mathscr{E}_n^+$ telle que $\det(A') \geq \det(A)$. Ainsi si A_0 est une matrice de $\mathscr{E}_n$ telle que $\det(A_0) = m_n$ alors une matrice $A_0' \in \mathscr{E}_n^+$ fournie par cette propriété satisfait $\det(A_0') \geq \det(A_0)$, et donc A_0' réalisé également ce maximum.

Pour démontrer cette propriété, on utilise l'indication fournie.

Déjà, on remarque que pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, la fonction $t \mapsto \det(A + tE_{i,j})$ est affine, par multilinéarité du déterminant. En outre, si $A \in \mathscr{E}_n$, il existe un intervalle $I_{i,j}$ borné tel que $A + tE_{i,j}$ appartient à $\mathscr{E}_n$, et si t^* est au bord de $I_{i,j}$, $(A + t^* E_{i,j})_{i,j}$ vaut ± 1.

Ensuite, pour une fonction affine sur un intervalle, le maximum est toujours atteint au bord de cet intervalle. On applique donc l'algorithme suivant : si $A_0 \in \mathscr{E}_n$ est telle que $\det(A_0) = m_n$, on remplace successivement A_0 par $A_0 + t_{i,j}^* E_{i,j}$, où $t_{i,j}^*$ est tel que $(A_0 + t_{i,j}^* E_{i,j})_{i,j} = \pm 1$ et la fonction $t \mapsto \det(A_0 + tE_{i,j})$ est maximale en $t_{i,j}^*$.

Une fois la procédure terminée (ce qui finit par arriver car il n'y a qu'un nombre fini de coefficients), on aboutit à une matrice A_0' de $\mathscr{E}_n^+$ telle que $\det(A_0') \geq \det(A_0)$, et la propriété est démontrée.

Question 2.

Montrer que $m_n = \max\{|\det(A)|,\ A \in \mathscr{E}_n\}$.

Correction.

On remarque que si A est une matrice de $\mathscr{E}_n$, alors la matrice obtenue en remplaçant la première colonne de A par son opposée est également dans $\mathscr{E}_n$, et $\det(A') = -\det(A)$. Ainsi l'ensemble des valeurs prises par det sur $\mathscr{E}_n$ est symétrique par rapport à 0 (et de même sur $\mathscr{E}_n^+$, et le résultat suit.

Question 3.

Montrer que $m_n \leq n^{n/2}$ et qu'une matrice $A \in \mathscr{E}_n$ réalise la borne $|\det(A)| = n^{n/2}$ si et seulement si elle est de Hadamard.

Correction.

Soit $A_0 \in \mathscr{E}_n^+$ telle que $|\det(A_0)| = m_n$. Si A_0 n'est pas inversible alors $\det(A_0) = 0 \leq n^{n/2}$, et l'inégalité est vraie. Si A_0 est inversible, l'inégalité de Hadamard (question 10b) montre que $|\det(A_0)| \leq \prod_{i=1}^n \|C_i\|$. Or si $A_0 \in \mathscr{E}_n^+$, on a $\|C_i\| = n^{1/2}$ pour tout i, ce qui donne $|\det(A_0)| \leq n^{n/2}$.

La deuxième assertion découle directement de la caractérisation du cas d'égalité dans l'inégalité de Hadamard à la question 10c.

Question 4.

Montrer que si n est impair alors $\mathscr{H}_n$ est vide. Montrer que $\mathscr{H}_2$ est non-vide.

Correction.

Si $A \in \mathscr{E}_n^+$ alors

$$\langle C_1, C_2| = \sum_{i=1}^n A_{i,1} A_{i,2} \equiv \sum_{i=1}^n 1 \bmod 2 \equiv n \bmod 2.$$

Donc si n est impair, $\langle C_1, C_2| \neq 0$ et A ne peut pas être de Hadamard.

Si $n = 2$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

Question 5.

Montrer que si $A \in \mathscr{E}_n^+$ alors $\det(A)$ est un entier pair.

Correction.

Il est clair que le déterminant est un entier (par la formule générale ou par développement par rapport à une colonne et récurrence).

Une première démonstration aux limites du programme consiste à passer la matrice modulo 2 : dans ce cas elle est composée uniquement de 1, donc elle est pas inversible modulo 2 et donc $\det(A) = 0 \bmod 2$.

Une deuxième démonstration est que par la formule générale du déterminant, le déterminant d'une matrice de $\mathscr{E}_n^+$ est la somme de $n!$ termes égaux à ± 1, or pour $n \geq 2$, $n!$ est pair, donc le déterminant est congru à $n! \bmod 2$, donc pair.

Troisième démonstration : on somme les 2 premières colonnes dans la première $C_1 + C_2 = C_1'$. Le déterminant est inchangé, mais maintenant C_1' est à coefficients dans $\{-2,0,2\}$. Donc en développant par rapport à la première colonne, le déterminant est pair.

Question 6.

En déduire que $m_3 = 4$.

Correction.

L'inégalité de la question 13 dit que $m_3 < 3^{3/2} = \sqrt{27} \in]5,6[$, donc $m_3 \leq 5$. Comme m_3 est pair, on a alors $m_3 \leq 4$. Il reste à trouver par le calcul un exemple de matrice de $\mathscr{E}_3^+$ de déterminant égal à ± 4. Par exemple on a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 4.$$

Question 7.

Soit $n \geq 3$. Dans cette question on montre que si $\mathscr{H}_n$ est non-vide, alors n est un multiple de 4. Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note $C_i(A)$ le i^{e} vecteur colonne de A.

Question 7. (a)

Montrer que si $\mathscr{H}_n \neq \emptyset$, il existe $H \in \mathscr{H}_n$ telle que $C_1(H) = (1, \ldots, 1)$.

Correction.

On part d'une matrice de Hadamard H_0. Si on multiplie une ligne par -1, la matrice reste de Hadamard, car les produits scalaires entre colonnes sont conservés. On fait donc cette opération sur toutes les lignes i telles que $H_{i,1} = -1$ et le tour est joué.

Question 7. (b)

On prend H comme à la question précédente et on introduit les quantités suivantes :

- x le cardinal de l'ensemble des indices i tels que $H_{i,2} > 0$ et $H_{i,3} > 0$;
- y le cardinal de l'ensemble des indices i tels que $H_{i,2} > 0$ et $H_{i,3} < 0$;
- z le cardinal de l'ensemble des indices i tels que $H_{i,2} < 0$ et $H_{i,3} > 0$;
- t le cardinal de l'ensemble des indices i tels que $H_{i,2} < 0$ et $H_{i,3} < 0$

Ecrire un système de quatre équations satisfaites par les variables x, y, z, t et en déduire que n est un multiple de 4.

Correction.

On a $x + y + z + t = n$ car cette somme compte le nombre de coefficients de C_2. Ensuite en écrivant $\langle C_1, C_2|$ on compte $x + y$ fois 1 et $z + t$ fois -1, donc $x + y - z - t = 0$.

De même

$$\langle C_1, C_3| = 0 \Rightarrow x + z - y - t = x - y + z - t = 0$$

et
$$\langle C_2, C_3| = 0 \Rightarrow x - y - z + t = 0.$$

Donc le système obtenu est
$$\begin{cases} x + y + z + t = n \\ x + y - z - t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$$

En sommant ces 4 équations on obtient $4x = n$ donc n est un multiple de 4.

Question 8.

Soit $H \in \mathscr{H}_n$ et soit $\widetilde{H}$ la matrice définie par blocs par
$$\widetilde{H} = \begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\widetilde{H}$ appartient à $\mathscr{H}_{2n}$. En déduire que pour tout $k \geq 1$, l'ensemble des matrices de Hadamard de taille 2^k est non vide.

Correction.

Il est clair que $\tilde{H} \in \mathscr{E}^+_{2n}$ et que ses colonnes sont orthogonales car les produits scalaires correspondants sont des combinaisons de ceux obtenus avec H, qui sont nuls. Comme on a trouvé une matrice de Hadamard 2×2, une récurrence immédiate donne l'existence d'une matrice de Hadamard de taille 2^k pour tout $k \geq 1$.

Jacques Hadamard a produit en 1893 des exemples de matrices de Hadamard de taille 12 et 20. La question de savoir si pour tout k il existe une matrice de Hadamard de taille $4k$ est ouverte depuis plus d'un siècle.

Méthode probabiliste et minoration de m_n

Dans cette partie on se donne un entier $n \geq 2$ et on considère une matrice aléatoire notée M dont les coefficients $M_{i,j}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, suivant une loi uniforme dans $\{-1, 1\}$. On admettra qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P})$ sur lequel seront définies les diverses variables aléatoires considérées et l'espérance sera notée $\mathbb{E}(\cdot)$.

On rappelle la formule
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) A_{1,\sigma(1)} \cdots A_{n,\sigma(n)},$$
où $\mathfrak{S}_n$ désigne le groupe symétrique (i.e. le groupe des bijections de $\{1, \ldots, n\}$) et $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.

Question 1.

Pour toute fonction $f : \mathscr{E}^+_n \to \mathbb{R}$, justifier que $\mathbb{E}(f(M))$ s'exprime sous la forme
$$\mathbb{E}(f(M)) = \frac{1}{N_n} \sum_{A \in \mathscr{E}^+_n} f(A),$$
où N_n est une quantité que l'on explicitera.

Correction.

Comme les n^2 coefficients sont indépendants, pour $A \in \mathscr{E}_n^+$ donnée on a $\mathbb{P}(M = A) = 2^{-n^2}$.

La formule de transfert donne alors

$$\mathbb{E}(f(M)) = \sum_{A \in \mathscr{E}_n^+} f(A)\mathbb{P}(M = A) = \frac{1}{2^{n^2}} \sum_{A \in \mathscr{E}_n^+} f(A).$$

Question 2.

Montrer que $\mathbb{E}(\det(M)) = 0$.

Correction.

Soit $\theta : \mathscr{E}_n^+ \to \mathscr{E}_n^+$ l'application qui transforme la première colonne de $A \in \mathscr{E}_n^+$ en son opposée.

C'est une involution de $\mathscr{E}_n^+$, donc une bijection, et pour toute $A \in \mathscr{E}_n^+$ on a $\det(\theta(A)) = -\det(A)$ par multilinéarité. On obtient alors

$$\mathbb{E}(\det(M)) = \frac{1}{2^{n^2}} \sum_{A \in \mathscr{E}_n^+} \det(A) = \frac{1}{2^{n^2}} \sum_{B \in \mathscr{E}_n^+} \det(\sigma(B)) = -\frac{1}{2^{n^2}} \sum_{A \in \mathscr{E}_n^+} \det(A) = -\mathbb{E}(\det(M))$$

et donc $\mathbb{E}(\det(M)) = 0$.

Question 3. (a)

Soient σ et τ des permutations distinctes de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(M_{1,\sigma(1)} \cdots M_{n,\sigma(n)} \cdot M_{1,\tau(1)} \cdots M_{n,\tau(n)}\right) = 0.$$

Correction.

Par hypothèse il existe i tel que $\sigma(i) \neq \tau(i)$. Pour simplifier les notations, supposons sans perte de généralité que $i = 1$.

Posons $X = M_{1,\sigma(1)}$, $Y = M_{1,\tau(1)}$ et

$$Z = M_{2,\sigma(2)} \cdots M_{n,\sigma(n)} M_{2,\tau(2)} \cdots M_{n,\tau(n)}$$

.

Comme les coefficients $M_{i,j}$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et que $(1,\sigma(1)) \neq (1,\tau(1))$ d'une part et que d'autre par $(1,\sigma(1))$ et $(1,\tau(1))$ n'apparaissent pas dans la liste des $(i,\sigma(i))$ et $(i,\tau(i))$ pour $i > 1$, les variables aléatoires X, Y et Z sont mutuellement indépendantes.

Ainsi $\mathbb{E}(XYZ) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)$. Mais $\mathbb{E}(X) = 0$ donc $\mathbb{E}(XYZ) = 0$, qui est le résultat demandé.

Question 3. (b)

En déduire que $\mathbb{E}\left(\det(M)^2\right) = \mathbb{E}\left(\det(M^{\mathrm{t}} M)\right) = n!$

Correction.

Pour toute matrice A on a $\det({}^{\mathrm{t}}A) = \det(A)$ donc $\det(A)^2 = \det(A^{\mathrm{t}} A)$ et la première égalité est facile.

Ensuite on écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\det(M)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) M_{1,\sigma(1)}\cdots M_{n,\sigma(n)}\right)\left(\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\tau) M_{1,\tau(1)}\cdots M_{n,\tau(n)}\right)\right)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)\mathbb{E}\left(M_{1,\sigma(1)}\cdots M_{n,\sigma(n)}\cdot M_{1,\tau(1)}\cdots M_{n,\tau(n)}\right)\end{aligned}$$

par linéarité de l'espérance.

L'espérance dans la ligne au dessus est nulle, donc la somme porte uniquement sur $\sigma = \tau$. Ainsi on obtient

$$\mathbb{E}\left(\det(M)^2\right) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (\epsilon(\sigma))^2 \mathbb{E}\left(\left(M_{1,\sigma(1)}\cdots M_{n,\sigma(n)}\right)^2\right) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} 1 = n!$$

Question 4.

En déduire que $m_n \geq \sqrt{n!}$

Correction.

Si on avait $m_n < \sqrt{n!}$, on obtiendrait $\det(A)^2 < n!$ pour toute $A \in \mathscr{E}_n^+$, et donc

$$\mathbb{E}\left((\det(M))^2\right) < n!,$$

ce qui contredirait la question précédente. Donc $m_n \geq n!$.

Question 5.

Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}.$$

L'objet de cette question est de montrer que la suite u_n converge vers une limite $\ell > 0$.

Question 5. (a)

Soit $v_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Faire un développement limité à l'ordre 2 de v_n quand $n \to \infty$.

Correction.

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2}$$

donc

$$\begin{aligned}\ln\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1\\ &= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Question 5. (b)

Démontrer le résultat annoncé.

Correction.

Le DL de la question précédente et le critère de Riemann montrent que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

Comme $\sum_{n=1}^{N} v_n = \ln u_{N+1} - \ln u_1$, il s'ensuite que la suite $(\ln(u_n))$ converge vers une limite c, et donc (u_n) converge vers $\ell = e^c > 0$.

Question 6.

Montrer que pour n assez grand on a

$$m_n \geq \left(\frac{n}{e}\right)^{n/2}.$$

Montrer également que si θ est un réel tel que $\dfrac{1}{e} < \theta \leq 1$, alors

$$\mathbb{P}\left(|\det(M| \geq (\theta n)^{n/2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Correction.

L'équivalent $n! \sim \ell n^{n+1/2} e^{-n}$ de la question précédente (formule de Stirling) donne $\sqrt{n!} \sim \sqrt{\ell}\left(\frac{n}{e}\right)^{n+2} n^{1/4}$ donc

$$m_n \geq \sqrt{n!} > \left(\frac{n}{e}\right)^{n/2} \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

Ensuite, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|\det(M| \geq (\theta n)^{n/2}\right) &\leq \frac{1}{(\theta n)^n}\mathbb{E}\left((\det(M))^2\right)\\ &= \frac{n!}{(\theta n)^n} = \frac{\sqrt{n}}{(\theta e)^n}\cdot\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} \sim \frac{\ell\sqrt{n}}{(\theta e)^n}\end{aligned}$$

qui converge vers 0 par croissances comparées, et on conclut.

On conjecture qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout n, $m_n \geq cn^{n/2}$. Terence Tao et Van Vu ont démontré en 2005 que pour tout $\delta > 0$, avec une grande probabilité, on a

$$e^{-\delta n} \leq \frac{|\det(M)|}{\sqrt{n!}} \leq e^{\delta n}.$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2025

Épreuve de mathématiques

Éléments de correction

Le sujet est composé d'un unique problème ayant pour objet l'estimation de quantiles extrêmes. Les questions peuvent être traitées indépendamment. Il est cependant conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer. La notation tiendra largement compte de la clarté et de la précision des réponses.

Notations et rappels

Pour l'ensemble de l'énoncé, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ où $\mathscr{A}$ est une tribu de parties de Ω et $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité.

- Une **variable aléatoire réelle** est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[X \le x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\} \in \mathscr{A}$.
- Soit X une variable aléatoire. La fonction $F_X(\cdot)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F_X(x) = \mathbb{P}([X \le x])$ est la **fonction de répartition** de X. On admettra que cette fonction est nécessairement croissante et continue à droite.
- Un **vecteur aléatoire** de taille $n \ge 1$ est un n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ dont toutes les composantes sont des variables aléatoires réelles.
- Deux vecteurs aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont dits **égaux en loi** si pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}([X_1 \le x_1] \cap \ldots \cap [X_n \le x_n]) = \mathbb{P}([Y_1 \le x_1] \cap \ldots \cap [Y_n \le x_n])$. L'égalité en loi est notée $(X_1, \ldots, X_n) \stackrel{\mathscr{L}}{=} (Y_1, \ldots, Y_n)$.
- La loi de la variable aléatoire X est absolument continue sur $\mathbb{R}$ si la fonction de répartition $F_X(\cdot)$ est continue et dérivable (presque-partout) de dérivée $f_X(\cdot)$ qui s'intègre à 1. On a alors que pour toute fonction continue positive $g : \mathbb{R} \to [0, \infty[$,
$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$
- Soit $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires. On dit que X_n **converge en probabilité** vers $c \in \mathbb{R}$ ($X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$) si pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}([|X_n - c| \ge \varepsilon]) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. On admettra également que pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ alors $g(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(c)$.
- Soit $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires. On dit que X_n **converge en loi** vers une loi $\mathscr{D}$ ($X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{D}$) si $\mathbb{P}(X_n \le t) \to G(t)$ en tout point de continuité de la fonction de répartition $G(\cdot)$ de la loi $\mathscr{D}$.
- Soit $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires que l'on supposera indépendantes et de même loi. Si ces variables aléatoires admettent une espérance égale à $\mu \in \mathbb{R}$, la **loi faible des grands nombres** assure que
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu.$$
- Soit $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires que l'on supposera indépendantes et de même loi. Si ces variables aléatoires admettent une espérance égale à $\mu \in \mathbb{R}$ et une variance égale à $\sigma^2 > 0$, le **théorème de la limite centrale** assure que
$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mu \right) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,1).$$

Présentation du problème

Soit $X : (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de fonction de répartition $F_X(\cdot)$. Le **quantile** d'ordre $u \in [0,1]$ de la variable aléatoire X est donné par

$$Q_X(u) := \inf\{x \in \mathscr{X} \mid F_X(x) \geq u\},$$

où $\mathscr{X} \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble des valeurs prises par la variable X. La fonction $Q_X(\cdot)$ est appelée **la fonction quantile** de X. Le **point terminal** de la loi de la variable aléatoire X est

$$\xi_X := \lim_{u \to 1_-} Q_X(u) \in]-\infty, +\infty].$$

Il correspond à la plus grande valeur observable de X. Enfin, on admettra facilement que si $F_X(\cdot)$ est strictement croissante et continue (donc bijective) alors $Q_X(\cdot) = F_X^{-1}(u)$ où $F_X^{-1}(\cdot)$ est la bijection réciproque.

A l'aide des observations de $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et de même fonction de répartition $F_X(\cdot)$, l'objectif du problème est celui de l'estimation du quantile $Q_X(1-\alpha_n)$ où (α_n) est une suite dans $[0,1]$ telle que $n(1-\alpha_n) \to c \in [0,1)$ lorsque $n \to \infty$. Un tel quantile est dit **extrême**.

Premier contact avec la fonction quantile

Soit Y une variable aléatoire de fonction de répartition

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0, \\ \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Question 1.

Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y ?

Correction

La variable aléatoire Y ne prend que des valeurs positives.

Question 2.

Donner l'expression de la fonction quantile $Q_Y(\cdot)$ de la variable aléatoire Y.

Correction

Inversons la fonction $F_Y(X)$ en résolvant l'équation $F_Y(X) = y \iff \exp\frac{-1}{x} = y \iff x = \frac{-1}{\ln y}$.

Ainsi, pour tout $y \in]0,1[$, $Q_Y(y) = \frac{-1}{\ln y}$. De plus, $Q_Y(0) = 0$ et $Q_Y(1) = +\infty$

Question 3.

Quel est le point terminal de la loi de Y ?

Correction

D'après la question précédente, le point terminal de la loi de Y est $Q_Y(1) = +\infty$

On note U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.

Question 4.

Donner l'expression de sa fonction de répartition $F_U(\cdot)$ ainsi que de sa fonction quantile $Q_U(\cdot)$).

Correction

On a

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } x \in [0,1[, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

D'où $Q_U(y) = y$ pour tout $y \in [0,1]$

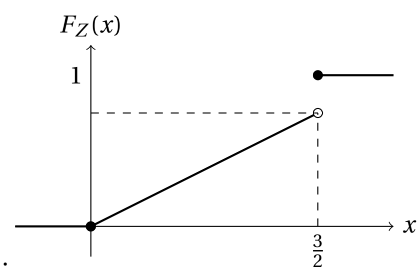
Soit Z une variable aléatoire de fonction de répartition $F_Z(\cdot)$ donnée par

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x/2 & \text{si } x \in [0,3/2[, \\ 1 & \text{si } x \geq 3/2. \end{cases}$$

Question 5.

En notant $Q_Z(\cdot)$ la fonction quantile de Z, donner la valeur de $Q_Z(1/2)$, de $Q_Z(3/4)$ et de $Q_Z(9/10)$.

Correction



On commence par tracer le graphique de la fonction de répartition F_Z :

On a ainsi que $Q_Z(1/2) = 1$, $Q_Z(3/4) = 3/2$ et $Q_Z(9/10) = 3/2$.

Question 6.

Quel est le point terminal de la loi de Z ?

Correction

Le point terminal est $Q_Z(1) = 3/2$.

Dans les questions 7 à 9, on s'intéresse à quelques propriétés de la fonction quantile $Q_X(\cdot)$ d'une variable aléatoire quelconque X.

Question 7.

Montrer que si $Q_X(u) \leq x$ alors $F_X(x) \geq u$. La réciproque est-elle vraie ?

Correction

Il suffit de voir que :

$$Q_X(u) \leq x \iff \inf\{y \in X | F_Y(y) \geq u\} \leq x$$

Ainsi, au point x, on a nécessairement que $F_X(x) \geq u$. Réciproquement, si $F_X(x) \geq u$ alors, comme F_X est une fonction croissante, $Q_X(u) = \inf\{y \in X | F_X(y)\ geq u\}$ sera nécessairement inférieur ou égal à x.

En conclusion, $Q_X(u) \leq x \iff F_X(x) \geq u$.

Question 8.

En utilisant la question précédente, montrer que $Q_X(U) \overset{\mathscr{L}}{=} X$ où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.

Correction

Il s'agit de montrer que $\mathbb{P}[Q_X(u) \leq x] = F_X(x)$.

Or d'après la question précédente,

$$\mathbb{P}[Q_X(u) \leq x] = \mathbb{P}[F_X(x) \geq 0] = F_X(x)$$

par définition de la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0,1]$.

Question 9.

En déduire que si X admet une espérance (i.e., si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$) alors

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 Q_X(u)du.$$

Correction

Si X ademet une espérance alors, d'après la question précédente assurant que $Q_X(U) \overset{\mathscr{L}}{=} X$,

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[Q_X(U)] = \int_0^1 Q_X(u)du.$$

Une première tentative d'estimation

Une première idée pour estimer le quantile extrême $Q_X(1-\alpha_n)$ est d'utiliser l'estimateur empirique de la fonction de répartition. Cet estimateur est donné par

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{ind}_{]-\infty,x]}(X_i) = \frac{\mathrm{Card}\left(\{i \in \{1,\ldots,n\} \mid X_i \leq x\}\right)}{n}.$$

où $\mathrm{ind}_A(\cdot)$ est la fonction indicatrice sur l'ensemble A. On propose alors d'estimer $Q_X(\cdot)$ par $\widehat{Q}_{n,X}(\cdot) := \inf\{x \in \mathscr{X} \mid \widehat{F}_n(x) \geq \cdot\}$. Nous verrons plus loin que cet estimateur fait appel à la notion de statistique d'ordre. L'objectif de la partie est de se familiariser avec cette notion. L'étude de l'estimateur $\widehat{Q}_{n,X}(\cdot)$ sera faite dans la partie .

Statistiques d'ordre

Les statistiques d'ordre $X_{1,n} \leq \cdots \leq X_{n,n}$ sont obtenues en triant par ordre croissant les valeurs prises par $X_1,\ldots,X_n$. Par exemple, $X_{1,n} : \Omega \to \mathbb{R}$ est la nouvelle variable aléatoire définie pour tout $\omega \in \Omega$ par $X_{1,n}(\omega) = \min(X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega))$.

Question 10.

Donner, en fonction de $F_X(\cdot)$, l'expression de la fonction de répartition de la variable aléatoire $X_{1,n}$. Même question pour la variable aléatoire $X_{n,n}$.

Correction

La fonction de répartition de la variable aléatoire $X_{1,n}$ est :

$$F_{1,n}(x) = \mathbb{P}[X_{1,n} \leq x] = 1 - \mathbb{P}[min(X_1, ..., X_n) > x] = 1 - \mathbb{P}[(X_1 > x) \cap ... \cap (X_n > x)]$$

En utilisant l'indépendance entre les X_i et le fait que pour tout i, la fonction de répartition de X_i est F_X, on en déduit que :

$$X_{1,n} = 1 - [1 - F_X(x)]^n$$

Un raisonnement similaire montre que $F_{n,n} = [F_X(x)]^n$

Question 11.

Si $F_X(\cdot)$ est la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0,1]$, donner en fonction de n l'expression de $\mathbb{E}(X_{n,n})$.

Correction

D'après la question précédente, la fonction de répartition de $X_{n,n}$ est dans la cas de la loi uniforme,

$$F_{n,n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x^n & \text{si } x \in [0,1[, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

La densité est donc $f_{n,n}(x) = nx^{n-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

D'où, $\mathbb{E}(X_{n,n}) = \int_0^1 nx^n dx = \frac{n}{n+1}$

Question 12.

Si $F_X(t) = \exp(-1/t^2)$ pour $t > 0$ et $F_X(t) = 0$ pour $t \leq 0$, donner en fonction de n l'expression de $\mathbb{E}(X_{n,n})$. On rappelle que

$$\int_0^\infty u^{-1/2} \exp(-u) du = \sqrt{\pi}.$$

Correction

On a dans ce cas :

$$F_{n,n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \exp(-n/x^2) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

La densité est donnée par : $f_{n,n}(x) = \frac{2n}{x^3} \exp(\frac{-n}{x^2} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_{n,n}) = 2\int_0^\infty \frac{n}{x^2} \exp\left(\frac{-n}{x^2}\right) dx$

En posant $u = n/x^2$, il vient, $\mathbb{E}(X_{n,n}) = \sqrt{n}\int_0^\infty y^-1/2 \exp(-y) dy = \sqrt{n\pi}$

Dans les questions 13 à 16, on s'intéresse aux statistiques d'ordre $U_{1,n} \leq \cdots \leq U_{n,n}$ d'un échantillon $U_1, \ldots, U_n$ de n variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

Question 13.

Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, montrer l'égalité des événements

$$\left[U_{k,n} \leq x\right] = \left[B_n(x) := \sum_{i=1}^{n} \mathrm{ind}_{]x,\infty]}(U_i) \leq n-k\right].$$

Correction

Si $U_{n,n} \leq x$, il y aura au maximum $n-k$ obstervations strictement supérieures à x (cela correspond au cas "extrême" où $U_{n,n} = x$).

En remarquant que le nombre d'observations strictement supérieures à x est égal à $B_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{]x,\infty](U_i)}$, on en déduit le résultat

Question 14.

Quelle est la loi de la variable aléatoire $B_n(x)$?

Correction

Comme les variables aléatoires $\mathbf{1}_{]x,\infty](U_i)}$ sont indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $P(U_i > x) = 1-x$, alors la somme $B_n(x)$ suit une loi binomiale de paramètres n et $1-x$.

Question 15.

En déduire que

$$\mathbb{P}\left([U_{k,n} \leq x]\right) = \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} [F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r}.$$

Correction

On en déduit des questions précédentes que :

$$\mathbb{P}[U_{k,n} \leq x] = \sum_{s=0}^{n-k} \binom{n}{s} (1-x)^s x^{n-s}$$

En posant $r = n-s$, on obtient :

$$\mathbb{P}[U_{k,n} \leq x] = \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{n-r} x^r (1-x)^{n-r} = \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r}$$

Question 16.

En déduire également que $\mathbb{P}\left([U_{k,n} \leq x]\right) = \mathbb{P}\left([U_{n-k+1,n} > 1-x]\right)$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Correction

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U_{n-k+1,n} > 1-x) &= 1 - \mathbb{P}(U_{n-k+1,n} \leq 1-x) \\
&= 1 - \sum_{r=n-k+1}^{n} \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} \\
&= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} - \sum_{r=n-k+1}^{n} \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} \\
&= \sum_{r=0}^{n-k} \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} \\
&= \mathbb{P}(U_{k,n} \leq x)
\end{aligned}$$

Estimateur empirique de la fonction quantile

Question 17.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer l'espérance $\mathbb{E}(\widehat{F}_n(x))$ et la variance $\mathbb{V}(\widehat{F}_n(x))$ de la fonction de répartition empirique.

Correction

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}(\widehat{F}_n(x)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{]-\infty,x]}(X_i)].$$

De plus, pour tout $i \in 1,\ldots,n$, $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{]-\infty,x]}(X_i)] = \mathbb{E}(X_i \leq x) = F_X(x) = F(x)$.
En conclusion, $\mathbb{E}(\widehat{F}_n(x)) = F(x)$.

De plus, par indépendance des variables aléatoires $X_i,\ldots,X_n$, on a :

$$\mathbb{V}(\widehat{F}_n(x)) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\left(\mathbf{1}_{]-\infty,x]}(X_i)\right)$$

Or, les variables aléatoires $\mathbf{1}_{]-\infty,x]}(X_i)$ étant toutes de loi de Bernoulli de paramètre $F(x)$, il vient :

$$\mathbb{V}(\widehat{F}_n(x)) = \frac{1}{n^2} nF(x)(1-F(x)) = \frac{F(x)(1-F(x))}{n}$$

Question 18.

En utilisant la loi faible des grands nombres, montrer que $\widehat{F}_n(x)$ converge en probabilité vers une constante que vous préciserez.

Correction

La loi faible des grands nombres et la question précédente permettent de conclure que :

$$\widehat{F}_n(x) \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(\widehat{F}_n(x)) = F(x)$$

Question 19.

En utilisant le théorème de la limite centrale, préciser vers quelle loi converge la suite de variables aléatoires $\sqrt{n}(\widehat{F}_n(x) - F(x))$.

Correction

Le théorème de la limite centrale assure que :

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{F(x)(1-F(x))}}(\widehat{F}_n(x) - F(x)) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Ainsi, $\sqrt{n}(\widehat{F}_n(x) - F(x))$ converge vers une loi normale centrée de variance $F(x)(1-F(x))$.

Question 20.

Quelle est la valeur de $\widehat{F}_n(x)$ pour $x < X_{1,n}$? Même question pour $x \geq X_{n,n}$.

Correction

Si $x < X_{1,n}$, il n'y a aucune observation inférieure ou égale à x donc $\widehat{F}_n(x) = 0$.
Si $x \geq X_{n,n}$, toutes les observations sont inférieures ou égale à x donc $\widehat{F}_n(x) = 1$.

Question 21.

Pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, quelle est la valeur de $\widehat{F}_n(x)$ lorsque $X_{k,n} \leq x < X_{k+1,n}$?

Correction

Si $x \in [X_{k,n}, X_{k+1,n}[$, il y a exactement k observations inférieures à x (les observations $X_{1,n}, ..., X_{k,n}$.
Donc $\widehat{F}_n(x) = \frac{k}{n}$.

Question 22.

En déduire que pour tout $u \in]0,1[$, $\widehat{Q}_{n,X}(u) = X_{\lceil nu \rceil,n}$ où $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid x \leq k\}$.

Correction

On remarque que $\widehat{Q}_{n,X}(u) = X_{k+1,n}$ si $u \in \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ et ceci pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$.
Il reste à voir que si $u \in \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ alors on a $k+1 = \lceil nu \rceil$

Question 23.

Pour $n = 10$, les valeurs observées des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont

$$x_1 = 7.6 \quad x_2 = 5.7 \quad x_3 = 9.7 \quad x_4 = 4.9 \quad x_5 = 2.8 \quad x_6 = 2 \quad x_7 = 7.5$$
$$x_8 = 0.5 \quad x_9 = 7.3 \quad x_{10} = 4.3$$

Quelle est la valeur observée de la médiane empirique $\widehat{Q}_{n,X}(1/2)$? Celle du premier quartile empirique $\widehat{Q}_{n,X}(1/4)$?

Correction

Remarquons tout d'abord que les observations des statistiques d'ordre $X_{1,n},\dots,X_{n,n}$ sont :

$$\begin{array}{lll} X_{1,n}=x_8=0.5 & X_{2,n}=x_6=2 & X_{3,n}=x_5=2.8 \\ X_{4,n}=x_{10}=4.3 & X_{5,n}=x_4=4.9 & X_{6,n}=x_2=5.7 \\ X_{7,n}=x_9=7.3 & X_{8,n}=x_7=7.5 & X_{9,n}=x_1=7.6 \\ X_{10,n}=x_3=9.7 & & \end{array}$$

D'après la question précédente, $\widehat{Q}_{n,X}(1/2)=X_{5,n}$ donc sa valeur observée est 4.9. De plus, $\widehat{Q}_{n,X}(1/4)=X_{\lceil 10/4\rceil,n}=X_{3,n}$ donc sa valeur observée est 2.8.

Question 24.

Quelle est l'expression de l'estimateur $\widehat{Q}_{n,X}(1-\alpha_n)$ lorsque $\alpha_n<1/n$? Qu'en déduisez vous quant à la pertinence de cet estimateur pour estimer un quantile extrême?

Correction

Si $\alpha_n<\frac{1}{n}$, alors $\widehat{Q}_{n,X}(1-\alpha_n)=X_{\lceil n(1-\alpha_n)\rceil,n}=X_{n,n}$ car $n-1<n(1-\alpha_n)\le n \implies \lceil n(1-\alpha_n)\rceil=n$.

Cet estimateur n'est donc pas adapté pour obtenir des quantiles extrêmes d'ordre $1-\alpha_n$ avec $\alpha_n<\frac{1}{n}$ car il est "bloqué" sur la valeur maximale de l'échantillon.

Estimation des quantiles d'une loi de Pareto

On souhaite à présent estimer les quantiles extrêmes d'une **loi de Pareto**. La fonction de répartition d'une variable aléatoire X de loi de Pareto de paramètres $\gamma>0$ et $c>0$ est

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<c, \\ 1-(x/c)^{-1/\gamma} & \text{si } x\ge c \end{cases}$$

Dans la partie 0.1, on va s'intéresser à une famille de loi plus générale : **les lois de type Pareto**. L'estimation du quantile extrême $Q_X(1-\alpha_n)$ sera faite dans la partie 0.1.

0.1 Lois de type Pareto

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi de type Pareto** si sa fonction de répartition est de la forme

$$F_X(x)=1-x^{-1/\gamma}L(x),$$

avec $\gamma>0$ et $L(\cdot)$ une fonction à variations lentes c'est-à-dire une fonction positive telle que pour tout $t>0$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(tx)}{L(x)}=1.$$

En particulier, les fonctions positives qui convergent vers une constante $c>0$ en l'infini sont des fonctions à variations lentes. On admettra enfin que le point terminal ξ_X d'une loi de type Pareto est $+\infty$.

Question 25.

En utilisant la définition ci-dessus, montrer que la fonction $x\mapsto\ln(x)$ est une fonction à variations lentes.

Correction

Soit $t > 0$, on a :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln tx}{\ln x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{\ln t}{\ln x}\right) = 1$$

Donc la fonction logarithme est une fonction à variations lentes.

Question 26.

Lorsque la fonction de répartition $F_X(\cdot)$ est strictement croissante et continue, montrer que pour tout $u \in]0,1[$,

$$Q_X(u) = (1-u)^{-\gamma}\,[L(Q_X(u))]^{\gamma}.$$

Correction

La fonction de répartition $F_X(\cdot)$ étant continue et strictement croissante, c'est une bijection de fonction réciproque $Q_X(\cdot)$. On a donc pour $u \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} u = F_X(Q_X(u)) &= 1 - [Q_X(u)]^{-\frac{1}{\gamma}} L(Q_X(u)) \\ \Longrightarrow\ [Q_X(u)]^{-\frac{1}{\gamma}} &= (1-u)\,L^{-1}(Q_X(u)) \\ \Longrightarrow\ Q_X(u) &= (1-u)^{-\gamma}\,L^{\gamma}(Q_X(u)) \end{aligned}$$

Question 27.

Si $L(x) \to c > 0$ lorsque $x \to \infty$, donner, en fonction de $s > 0$ et $\gamma > 0$, la limite du rapport $Q_X(1-s\alpha)/Q_X(1-\alpha)$ lorsque $\alpha \to 0$.

Correction

Soit $s > 0$, alors :

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{Q_X(1-s\alpha)}{Q_X(1-\alpha)} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{s^{-\gamma}\alpha^{-\gamma}}{\alpha^{-\gamma}}\,\frac{L^{\gamma}(Q_X(1-s\alpha))}{L^{\gamma}(Q_X(1-\alpha))} = s^{-\gamma}\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{L(Q_X(1-s\alpha))}{L(Q_X(1-\alpha))}\right)^{\gamma}$$

Or, $\lim_{u\to 1} Q_X(u) = \xi_X = +\infty \Longrightarrow \lim_{\alpha\to 0} L(Q_X(1-s\alpha)) = c > 0$.
D'où, $\lim_{\alpha\to 0} \frac{Q_X(1-s\alpha)}{Q_X(1-\alpha)} = s^{-\gamma}$

Question 28.

Soit la variable aléatoire Y de fonction de répartition $F_Y(\cdot)$ telle que $F_Y(x) = 0$ si $x \le 0$ et $F_Y(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x > 0$. Quelle est la limite de $x^2(1 - F_Y(x))$ lorsque $x \to \infty$.

Correction

On a :

$$\lim_{x\to\infty} x^2(1 - F_Y(x)) = \lim_{x\to\infty} x^2\left(1 - \exp\frac{-1}{x^2}\right)$$

En utilisant l'équivalence $\exp(u) - 1 \sim_{u\to 0} u$, on a :

$$\lim_{x\to\infty} x^2(1 - F_Y(x)) = \lim_{x\to\infty} x^2 \times \frac{1}{x^2} = 1$$

Question 29.

En déduire que cette variable aléatoire Y suit une loi de type Pareto (vous préciserez la valeur de γ ainsi que l'expression de la fonction à variations lentes).

Correction

De la question précédente, on en déduit que $1 - F_Y(x) = x^{-2}L(x)$ avec $L(x) = x^2(1 - F_Y(x)) \to_{x\to\infty} 1$.
Donc, $L(\cdot)$ est bien une fonction à variations lentes et ainsi, $F_Y(x) = 1 - x^{-1/\gamma}L(x)$ avec $\gamma = 1/2$.

Question 30.

Calculer l'espérance de Y.

Correction

La densité de Y est $f_Y(x) = \frac{2}{x^3} \exp \frac{-1}{x^2} \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)$.
Ainsi, $\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty \frac{2}{x^2} \exp \frac{-1}{x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Estimateurs de Hill et de Weissman

Dans cette partie, on suppose que X suit une loi de Pareto de paramètres $\gamma > 0$ et $c > 0$. La loi de Pareto est évidemment une loi de type Pareto correspondant au cas où la fonction à variations lentes $L(\cdot)$ est constante égale à c.
Dans toute la suite, on notera $U_{1,n} \leq \ldots \leq U_{n,n}$ les statistiques d'ordre associées à des variables aléatoires indépendantes $U_1, \ldots, U_n$ suivant chacune la loi uniforme sur $[0, 1]$. On admettra les résultats suivants.

(R1) Soit un entier $n \geq 1$, on note $E_1, \ldots, E_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle standard c'est-à-dire telles que pour tout $i = 1, \ldots, n+1$,

$$\mathbb{P}([E_i \leq x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \exp(-x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Les statistiques d'ordre $U_{1,n} \leq \ldots \leq U_{n,n}$ vérifient l'égalité en loi

$$\big(U_{i,n},\ i = 1, \ldots, n\big) \overset{\mathcal{L}}{=} \left(\sum_{j=1}^{i} E_j \Big/ \sum_{j=1}^{n+1} E_j\ ,\ i = 1, \ldots, n \right).$$

(R2) $(X_{1,n}, \ldots, X_{n,n}) \overset{\mathcal{L}}{=} (Q_X(U_{1,n}), \ldots, Q_X(U_{n,n}))$.

(R3) $(U_{i,n},\ i = 1, \ldots, n) \overset{\mathcal{L}}{=} (1 - U_{n-i+1,n},\ i = 1, \ldots, n)$.

(R4) Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathscr{D}$ et si $\epsilon_n \to 0$ alors $\epsilon_n X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

La première étape pour estimer un quantile extrême d'une loi de Pareto est l'estimation du paramètre $\gamma > 0$. Pour ce faire, on utilise l'**estimateur de Hill** défini par

$$\widehat{\gamma}_n(k_n) := \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \ln\left(\frac{X_{n-i+1,n}}{X_{n-k_n,n}} \right).$$

où (k_n) est une suite d'entiers dans l'ensemble $\{1, \ldots, n-1\}$ telle que $k_n \to \infty$ et $n/k_n \to \infty$.

Question 31.

Montrer que $\left(\ln(X_{n-i+1,n}),\ i=1,\dots,n\right) \stackrel{\mathscr{L}}{=} \left(c(1-U_{n-i+1,n})^{-\gamma},\ i=1,\dots,n\right)$.

Correction

D'après (R2), on a :

$$\ln X_{n-i+1,n}; i=1,...,n \stackrel{\mathscr{L}}{=} (\ln Q_X(U_{n-i+1,n}); i=1,...,n)$$

Or, $Q_X(u) = c(1-u)^{-\gamma}$ d'où le résultat.

Question 32.

En utilisant le résultat (R3), en déduire que

$$\widehat{\gamma}_n(k_n) \stackrel{\mathscr{L}}{=} \frac{\gamma}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} \ln\left[\left(\frac{U_{i,n}}{U_{k_n+1,n}}\right)^{-1}\right].$$

Correction

Il découle de la question précédente que :

$$\widehat{\gamma}_n(k_n) \stackrel{\mathscr{L}}{=} \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} \ln\left(\frac{1-U_{1-i+1,n}}{1-U_{n-k},n}\right)^{-\gamma} = \frac{\gamma}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} \ln\left[\left(\frac{1-U_{1-i+1,n}}{1-U_{n-k},n}\right)^{-1}\right]$$

On conclut facilement en utilisant le résultat (R3)

Question 33.

En utilisant le résultat (R1), montrer que

$$\left(\frac{U_{i,n}}{U_{k_n+1,n}},\ i=1,\dots,k_n\right) \stackrel{\mathscr{L}}{=} \left(U_{i,k_n},\ i=1,\dots,k_n\right).$$

Correction

Posons $T_i = \sum_{j=1}^{i} E_j$. D'après (R1), on a :

$$\left(\frac{U_{i,n}}{U_{k+1,n}}; i=1,...,k\right) \stackrel{\mathscr{L}}{=} \left(\frac{T_i/T_{n+1}}{T_{k+1}/T_{n+1}}; i=1,...,k\right) \stackrel{\mathscr{L}}{=} \left(\frac{T_i}{T_{k+1}}; i=1,...,k\right) \stackrel{\mathscr{L}}{=} (U_{i,k}; i=1,...,k)$$

Question 34.

En déduire que

$$\widehat{\gamma}_n(k_n) \stackrel{\mathscr{L}}{=} \frac{\gamma}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} \ln\left(U_i^{-1}\right).$$

Correction

C'est direct car :

$$\widehat{\gamma}_n(k_n) \stackrel{\mathscr{L}}{=} \frac{\gamma}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} \ln U_{i,k}^{-1} = \frac{\gamma}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} lnU_i^{-1}$$

puisque on somme toutes les statistiques d'ordre.

Question 35.

Si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, quelle est la loi de la variable aléatoire $\ln(1/U)$?

Correction

Remarquons tout d'abord que $\ln(1/u)$ prend ses valeurs dans $[0,\infty[$. La fonction de répartition de $\ln(1/u)$ est :

$$\mathbb{P}(\ln(1/u) \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \mathbb{P}(u > \exp(-x)) = 1 - \exp(-x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Autrement dit, $\ln(1/u)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.

Question 36.

En déduire, en utilisant la loi faible des grands nombres et le théorème de la limite centrale, les convergences

$$\widehat{\gamma}_n(k_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \gamma \text{ et } k_n^{1/2}\left(\widehat{\gamma}_n(k_n) - \gamma\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\gamma^2),$$

où $\mathcal{N}(0,\gamma^2)$ est une loi normale d'espérance nulle et de variance égale à γ^2.

Correction

D'après la loi faible des grands nombres, on a :

$$\widehat{\gamma}_n(k_n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{\gamma}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} \ln U_i^{-1} \xrightarrow{\mathbb{P}} \gamma\mathbb{E}(\ln(U_1^{-1}) = \alpha$$

En utilisant le théorème de la limite centrale :

$$\sqrt{k_n}\left(\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k} \ln(U_i^{-1}) - 1\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Ainsi, en utilisant la formule précédente, on a :

$$\frac{\sqrt{k_n}}{\gamma}(\widehat{\gamma}_n(k_n) - \gamma) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

d'où le résultat.

On estime finalement le quantile extrême d'une loi de Pareto par

$$\widehat{Q}_{n,X}^{(W)}(1-\alpha_n) := X_{n-k_n,n}\left(\frac{n\alpha_n}{k_n}\right)^{-\widehat{\gamma}_n(k_n)}.$$

Cet estimateur est connu sous le nom d'**estimateur de Weissman**.

Question 37.

Montrer que $X_{n-k_n,n} \stackrel{\mathcal{L}}{=} cU_{k_n+1,n}^{-\gamma}$.

Correction

Il suffit de reprendre la question 31 avec $i = k+1$.

On a : $X_{n-k_n,n} \overset{\mathscr{L}}{=} c(1-U_{n-k_n,n})^{-\gamma}$

D'après (R3), on aboutit à $X_{n-k_n,n} \overset{\mathscr{L}}{=} cU_{k_n+1,n}^{-\gamma}$

Question 38.

En utilisant le résultat (R1) et la loi faible des grands nombres, montrer que

$$\frac{n}{k_n}U_{k_n+1,n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

Correction

D'après (R1), on a : $\frac{n}{k}U_{k+1,n} \overset{\mathscr{L}}{=} \frac{n}{k}\frac{T_{k+1}}{T_{n+1}}$ où comme précédemment, $T_i = \sum_{j=1}^{i} E_j$

Ainsi, $\frac{n}{k}U_{k+1,n} \overset{\mathscr{L}}{=} \frac{n}{n+1}\frac{k+1}{k}\frac{T_{k+1}/(k+1)}{T_{n+1}/(n+1)}$.

On a $\frac{n}{n+1} \to 1$, $\frac{k+1}{k} \to 1$ et d'après la loi faible des grands nombres, $\frac{T_{k+1}}{k+1} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ et $\frac{T_{n+1}}{n+1} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.

La conclusion est donc immédiate.

Question 39.

En déduire que

$$X_{n-k_n,n}\left(\frac{n}{k_n}\right)^{-\gamma} \xrightarrow{\mathbb{P}} c.$$

Correction

Il suffit de combiner les questions 37 et 38 :

$$X_{n-k_n,n}\left(\frac{n}{k}\right)^{-\gamma} \xrightarrow{\mathscr{L}} c\left(\frac{n}{k}U_{k+1,n}\right)^{-\gamma} \xrightarrow{\mathbb{P}} c$$

Question 40.

En utilisant (R4), montrer que si $k_n^{-1/2}\ln(k_n/(n\alpha_n)) \to 0$ alors

$$\left(\frac{n\alpha_n}{k_n}\right)^{\gamma-\widehat{\gamma}_n(k_n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

Correction

On a :

$$\ln\left[\left(\frac{n\alpha}{k}\right)^{\gamma-\widehat{\gamma}_n(k_n)}\right] = (\gamma-\widehat{\gamma}_n(k_n))\ln\frac{n\alpha}{k} = \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{k}(\widehat{\gamma}_n(k_n)-\gamma)\ln\frac{k}{n\alpha}$$

Or, d'après la question 36, $\sqrt{k}(\widehat{\gamma}_n(k_n)-\gamma) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{N}(0,\gamma^2)$ et par hypothèse, $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{k}{n\alpha} \to 0$.

Ainsi, (R4) assure que $\ln\left[\left(\frac{n\alpha}{k}\right)^{\gamma-\widehat{\gamma}_n(k_n)}\right] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

En prenant l'exponentielle, on a le résultat demandé.

Question 41.

Conclure sur la convergence en probabilité de $\frac{\widehat{Q}^{(W)}_{n,X}(1-\alpha_n)}{Q_X(1-\alpha_n)}$.

Correction

On a $Q_X(1\alpha_n) = c\alpha_n^{-\gamma}$
Donc :

$$\frac{\widehat{Q}^{(W)}_{n,X}(1-\alpha_n)}{Q_X(1-\alpha_n)} = \frac{1}{c} X_{n-k,n} \left(\frac{n}{k}\right)^{-\gamma} \left(\frac{n}{k}\alpha\right)^{\gamma-\widehat{\gamma}_n(k)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2025

Épreuve de français

Éléments de correction

Plan du texte

1§ 3 étapes dans l'évolution des civilisations phase 1 tradition autrefois pdt antiquité et moyen âge : structure traditionnelle car économie de pénurie. La nécessité prime pour survivre. Dès la naissance, chacun a sa place définie, son rôle entièrement dédié au service du groupe. Vie collective = société close/ pas d'évolution possible pour l'individu/ pas de? sur la notion de bonheur sauf collective : chacun fait ce qu'il a à faire dans le groupe.

§2 phase 2 Renaissance jusqu'à aujourd'hui (sauf aux USA + tôt à phase 3 car industrie ++), la population augmente et il y a – de lutte traditionnelle collective pour la survie/ c'est règne de l'abondance et du progrès/ notion de l'individualisme, doctrine majeure dès le XVIII.

§3 DONC différentes notions du bonheur apparaissent. Reste seulmt le cadre inculqué par la famille/ chacun a ses propres buts et sa propre quête du bonheur et de la réussite ambition / talent : chacun existe pour lui-même et son éducation lui permet de construire son bonheur. Personne ne sait en naissant où trouver son bonheur mais chacun sait qu'il lui appartient de la trouver. (ex anglais ou français).

§4 phase 3 = société de masse. Société = industrialisation et urbanisation ++. L'indiv n'est plus un élmt lambda de la ruche ou de la fourmilière/ il n'est plus un indiv indépdt façonné par sa famille/ C'est un robot pensant (soumis à la com/ TV / pub) c'est un indiv interchangeable, même milieu social, même âge, même profession dans une société qui n'est plus dirigiste mais qui influence tt autant les indiv = indiv identiques qui cherchent à se fondre dans la masse. Recherche du bonheur = + de confort et multiplication des relations = société conformiste.

§5 DONC personnalité de base = être social anonyme, recherche de ressemblance avec les autres indiv de la com avec absence de libre arbitre et d'originalité.

§6 Ensuite, la question du rapport de l'individu à la culture se pose : quelle est la place accordée à ceux qui s'écartent de la culture de la société dans laquelle ils vivent parce qu'ils conçoivent leur bonheur de manière différente ? Sont-ils bannis ou encouragés ? = pb de la tolérance ou de l'intolérance des cultures. La quête indiv n'est pas totalement libre du bonheur perso. Il faut que la société soit d'accord.

1 ex et son contre ex : culture dionysienne violente vs culture apollinienne douce et indiv au caractère opposé

Or on ne peut être heureux si on va/vit contre son tempérament. Ex du jh doux qui vit chez les Dobuans décrits comme violents. Le jh ne peut être heureux et est persécuté par les autres (= // exs juste au-dessus).

§7 En revanche, il existe des civilisations plus tolérantes. Et la notion de progrès civilisationnel passe sans doute par + de libéralisme, c à d. par plus d'acceptation des différences, plus de libertés. Chaque caractère est accepté et trouve un rôle utile, à sa mesure. Le combatif défendra la société quand le sage l'éduquera.

Proposition de résumé en 179 mots

Autrefois, les sociétés étaient fermées. Chacun, immuablement, dédiait sa vie/ entière à la survie du groupe car nécessité faisait loi. /Personne ne se souciait vraiment de son bonheur.

Après la/ période médiévale, le concept d'individu évolue parallèlement au progrès/. Les intérêts individuels variés priment sur le collectif. On cherche//50 avant tout son propre bonheur. L'individu, éduqué pour construire/ son destin, se choisit son bonheur.

Aujourd'hui, les sociétés de/ masse, surtout dans les milieux urbanisés ou industrialisés ont remplacé/ les anciennes sociétés. Être heureux, c'est vivre uniformément, conformément/ aux injonctions discrètes du groupe. C'est rechercher l'opulence//100 au risque de perdre son identité, son indépendance et de/ devenir interchangeable.

Mais alors quel impact a le milieu culturel/ d'un individu sur sa quête du bonheur ? S'il/ se distingue, sera-t-il rejeté ou encouragé ? Des exemples passés/ soulignent l'intolérance de civilisations différentes sur ce point. Même//150 si, chacun est libre de son bonheur, on doit adapter/ son comportement aux attentes sociétales, quitte à se renier parfois./ On renonce ainsi au bonheur. Heureusement, certaines cultures autorisent l'/épanouissement de chacun : c'est ainsi qu'il faudrait comprendre/ la notion de progrès. Chacun devrait trouver sa place en//200 mettant son caractère au service de la communauté. Le combatif/ pourrait défendre et protéger quand le sage éduquerait.