

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2025

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

L'épreuve est constituée de trois problèmes indépendants.

Rappel : Pour toutes les épreuves, les appareils électroniques (calculatrices, téléphones, traductrices), les casques, et les dictionnaires, ainsi que tout document, sont interdits.

Problème 1 : algèbre linéaire.

Dans ce problème on étudie l'existence de racines carrées réelles ou complexes pour les matrices $d \times d$ à coefficients réels, c'est-à-dire que l'on se donne $A \in M_d(\mathbb{R})$ et on recherche une matrice M dans $M_d(\mathbb{R})$ ou dans $M_d(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = A$. On parlera alors respectivement de racine carrée réelle ou complexe de A .

Dans les questions 1 à 5 on s'intéresse au cas $d = 2$ et on considère ensuite le cas où la dimension d est quelconque.

1. Supposons que $A \in M_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs propres positives. Montrer que A admet une racine carrée dans $M_2(\mathbb{R})$.
2. Supposons que $A \in M_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres non nulles de signes opposés.
 - (a) Montrer que A admet une racine carrée dans $M_2(\mathbb{C})$.
 - (b) Est-ce que A admet une racine carrée dans $M_2(\mathbb{R})$?
3. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $B_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. En s'appuyant sur une interprétation géométrique de la matrice B_θ , montrer qu'elle admet une racine carrée dans $M_2(\mathbb{R})$.
4. Supposons maintenant que $A \in M_2(\mathbb{R})$ est nilpotente et que $A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 - (a) Montrer que $A^2 = 0$.
 - (b) La matrice A admet-elle une racine carrée dans $M_2(\mathbb{C})$?
5. Supposons maintenant que $A \in M_2(\mathbb{R})$ admet une valeur propre réelle mais n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
 - (a) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une matrice nilpotente non nulle N tels que $A = \lambda I + N$.
 - (b) En supposant $\lambda > 0$, montrer que A admet une racine carrée dans $M_2(\mathbb{R})$.
 - (c) On suppose maintenant $\lambda < 0$. La matrice A peut-elle être diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
 - (d) Montrer que A n'admet pas de racine carrée dans $M_2(\mathbb{R})$.
6. On rappelle que $GL_d(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soient A et B deux matrices de $M_d(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $P \in GL_d(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On pose $P = P_1 + iP_2$, avec $P_1, P_2 \in GL_d(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\det(P_1 + xP_2) \neq 0$.
 - (b) Montrer que A et B sont semblables dans $M_d(\mathbb{R})$.
 - (c) Application : montrer que si une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ admet une valeur propre complexe de la forme $\alpha + i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, alors A est semblable sur $\mathbb{R}$ à la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.
7. Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable sur $\mathbb{C}$. On suppose que toutes les valeurs propres négatives de A sont de multiplicité paire. Montrer que A admet une racine carrée dans $M_d(\mathbb{R})$.

Problème 2 : analyse.

Soit f une fonction continue sur $]0, +\infty[$. Sous réserve que cette expression ait un sens, on pose pour $x \in \mathbb{R}_+$

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{tf(t)}{x^2 + t^2} dt.$$

L'objet de ce problème est d'étudier cette transformation et d'en déduire le calcul de certaines intégrales.

1. Dans cette question on considère la fonction f définie par $f(t) = \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^2}$.

- (a) Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in]0, +\infty[$.
- (b) On pose $G(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$. Exprimer F en fonction de G .
- (c) Montrer avec précision que G est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.
- (d) Calculer G' et en déduire la valeur de $F(x)$ pour tout x .
- (e) Montrer que la fonction $t \mapsto \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2$ est intégrable sur $[0, \infty[$ et utiliser ce qui précède pour déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 dt.$$

2. Dans cette question on considère la fonction f définie par $f(t) = \frac{\cos t}{t}$.

- (a) Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in]0, +\infty[$.
- (b) On pose H la fonction définie par $H(x) = xF(x)$. Montrer que la fonction H est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = \frac{\pi}{2}$. (On pourra penser au changement de variable $t = ux$).
- (c) Démontrer que F est de classe C^2 sur $]0, \infty[$.
- (d) En admettant la relation (que l'on ne demande pas de démontrer)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) = 0,$$

établir que H est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

- (e) En déduire l'expression de F .

Problème 3 : probabilités.

Dans tout ce problème, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires considérées. L'espérance d'un évènement $A \in \mathcal{A}$ sera notée $\mathbb{E}(A)$ et sa probabilité sera notée $\mathbb{P}(A)$.

On pourra utiliser sans démonstration le lemme de Borel-Cantelli : si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'évènements tels que la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors pour presque tout ω , on a $\omega \notin A_n$ pour n assez grand.

Soit Z une variable aléatoire réelle discrète. On note (M) la condition

$$(M) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}_+, \mathbb{E}(e^{\alpha|Z|}) \text{ est finie.}$$

On admettra que si (M) est satisfaite alors l'espérance $\mathbb{E}(|Z|)$ est finie, et on définit alors

$$\psi_Z(\lambda) = \ln \left(\mathbb{E} \left(e^{\lambda(Z - \mathbb{E}(Z))} \right) \right).$$

1. Montrer que si la variable aléatoire Z est bornée, la condition (M) est satisfaite.
2. On suppose que Z suit une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$. Montrer que la condition (M) est satisfaite et déterminer la fonction ψ_Z .
3. On suppose que Z est une variable aléatoire satisfaisant la condition (M). Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{P}(Z - \mathbb{E}(Z) \geq t) \leq e^{-(\lambda t - \psi_Z(\lambda))}.$$

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$g(x) = \ln(\text{ch}(x)) - \frac{x^2}{2},$$

où ch désigne la fonction cosinus hyperbolique : $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

- (a) Montrer que la fonction g est concave.
- (b) En déduire que pour tout $x \geq 0$ on a $\text{ch}(x) \leq e^{x^2/2}$.
5. Soient c un réel strictement positif et X une variable aléatoire réelle discrète satisfaisant $\mathbb{E}(X) = 0$ et $|X(\omega)| \leq c$ pour tout $\omega \in \Omega$.
 - (a) Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y à valeurs dans $[0, 1]$ telle que $X = -cY + c(1 - Y)$, et déterminer $\mathbb{E}(Y)$.
 - (b) Démontrer que pour tout $\lambda \geq 0$, on a $e^{\lambda X} \leq Y e^{-c\lambda} + (1 - Y) e^{c\lambda}$. (On pourra utiliser un argument de convexité.)
 - (c) Conclure que pour tout $\lambda \geq 0$, on a $\mathbb{E}(e^{\lambda X}) \leq \text{ch}(c\lambda)$.
6. On considère maintenant une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et $|X_n| \leq c_n$, où $c_n \in \mathbb{R}_+^*$. On pose S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

(a) Montrer que pour tout $\lambda \geq 0$ on a $\mathbb{E}\left(e^{\lambda S_n}\right) \leq e^{\frac{\lambda^2 v_n}{2}}$, où l'on a noté $v_n = \sum_{k=1}^n c_k^2$.

(b) En déduire que pour tout $t \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2v_n}}.$$

(c) On suppose que $c_n \leq Cn^\alpha$ pour une certaine constante $C > 0$ et un réel $\alpha \geq 1$. Montrer qu'il existe une constante $D \in \mathbb{R}$ telle que $v_n \leq Dn^{2\alpha+1}$.

(d) Conclure que si $\beta > \frac{\alpha+1}{2}$ est fixé, alors pour presque tout $\omega \in \Omega$, pour tout n assez grand on a $|S_n| \leq n^\beta$.

◇◇◇

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2025

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Rappel : Pour toutes les épreuves, les appareils électroniques (calculatrices, téléphones, traductrices), les casques, et les dictionnaires, ainsi que tout document, sont interdits.

Ce problème porte sur la notion de matrice de Hadamard. Les quatre parties sont largement indépendantes, même si les résultats principaux des parties 1 et 2 seront utilisés dans les parties 3 et 4.

Partie 1 : Une démonstration du théorème spectral.

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme euclidienne est notée $\|\cdot\|$. On identifiera si besoin $\mathbb{R}^n$ avec l'ensemble des vecteurs colonnes $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Étant donnée une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ on note $M_{i,j}$ le coefficient d'indice (i, j) de M et M^T la transposée de M .

Si besoin, on pourra utiliser sans démonstration le fait que l'application

$$M \mapsto |||M||| = \left(\sum_{i,j=1}^n M_{i,j}^2 \right)^{1/2}$$

définit une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

On rappelle que $O_n(\mathbb{R})$ désigne le groupe des matrices orthogonales de taille n , c'est à dire l'ensemble des matrices des isométries vectorielles.

L'objet de cette partie est de fournir une démonstration du théorème spectral, c'est à dire du fait que toute matrice symétrique est diagonalisable en base orthonormale. Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

1. Montrer l'équivalence entre les conditions :

- (i) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a $\|AX\| = \|X\|$;
- (ii) Pour tous $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ on a $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$;
- (iii) $A^T A = I_n$.

2. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous ensemble compact de $M_n(\mathbb{R})$.

3. On pose ϕ l'application de $O_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$\phi(P) = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} ((P^{-1}AP)_{i,j})^2.$$

Justifier que $\phi(P) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} ((P^{-1}AP)_{i,j})^2$ et montrer que ϕ atteint son minimum sur $O_n(\mathbb{R})$.

4. Pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et r, s des entiers appartenant à $\{1, \dots, n\}$ tels que $r < s$, on pose $Q = Q(r, s, \theta)$ la matrice telle que

$$Q_{r,r} = Q_{s,s} = \cos \theta, \quad Q_{r,s} = -Q_{s,r} = \sin \theta, \quad Q_{i,i} = 1 \text{ pour } i \notin \{r, s\} \text{ et } Q_{i,j} = 0 \text{ sinon.}$$

(a) Montrer que Q appartient à $O_n(\mathbb{R})$.

(b) On pose $B = Q^{-1}AQ$. Calculer $B_{i,j}$ en distinguant les cas suivants :

- $i, j \notin \{r, s\}$
- $(i \notin \{r, s\}, j = r)$ et $(i \notin \{r, s\}, j = s)$
- $(i, j) = (r, s)$.

- (c) En déduire que $\phi(Q) = \phi(I_n) + 2(B_{r,s}^2 - A_{r,s}^2)$.
5. Montrer que si la matrice A est telle que $\phi(I_n) > 0$, il existe $(r, s, \theta) \in \{1, \dots, n\}^2 \times [0, 2\pi]$ et Q comme précédemment tels que $\phi(Q) < \phi(I_n)$.
6. Utiliser ce qui précède pour démontrer que toute matrice symétrique est diagonalisable en base orthonormale.

Partie 2 : Inégalité de Hadamard

On rappelle qu'une matrice symétrique est dite positive si ses valeurs propres sont positives ou nulles, et définie-positive si celles-ci sont strictement positives. On rappelle également qu'une matrice symétrique est positive (resp. strictement positive) si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ différent de 0, on a $\langle AX, X \rangle \geq 0$ (resp. $\langle AX, X \rangle > 0$).

7. Démontrer l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, on a

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

8. Montrer que si B est une matrice symétrique positive on a $\det(B) \leq \left(\frac{\text{tr}(B)}{n}\right)^n$ et caractériser le cas d'égalité.
9. L'objet de cette question est de démontrer que si S est une matrice symétrique définie positive, on a

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^n S_{i,i}.$$

- (a) Montrer que pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $S_{i,i} > 0$.
- (b) On pose D la matrice diagonale telle que pour $1 \leq i \leq n$, $D_{i,i} = (S_{i,i})^{-1/2}$. Déterminer DSD et vérifier que DSD est symétrique et définie positive.
- (c) Démontrer l'inégalité indiquée, et caractériser le cas d'égalité.
10. Soit maintenant $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible quelconque.
- (a) Montrer que la matrice $A^T A$ est symétrique définie positive.
- (b) En utilisant les questions précédentes, démontrer l'inégalité de Hadamard

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \|C_i\|,$$

où les C_i sont les vecteurs colonnes de A .

- (c) Montrer que cette inégalité est une égalité si et seulement si les colonnes de A sont orthogonales.

Partie 3 : Matrices de Hadamard

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose

$$\mathcal{E}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, |A_{i,j}| \leq 1\},$$

$$\mathcal{E}_n^+ = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, |A_{i,j}| = 1\}$$

et $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{E}_n^+$ dont les colonnes sont orthogonales. Par définition, $\mathcal{H}_n$ est l'ensemble des matrices de Hadamard de taille n .

On s'intéresse au problème suivant : déterminer le maximum de la fonction déterminant sur $\mathcal{E}_n$. On note

$$m_n = \max\{\det(A), A \in \mathcal{E}_n\}.$$

11. Montrer que la fonction déterminant atteint son maximum sur $\mathcal{E}_n$, et que celui-ci est atteint sur $\mathcal{E}_n^+$.

(Indication : pour cela, étant donnée $A \in \mathcal{E}_n$, on pourra considérer pour (i_0, j_0) fixé la matrice $A + tE_{i_0, j_0}$, où $(E_{i,j})$ désigne la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$)

12. Montrer que $m_n = \max\{|\det(A)|, A \in \mathcal{E}_n\}$.
13. Montrer que $m_n \leq n^{n/2}$ et qu'une matrice $A \in \mathcal{E}_n$ réalise la borne $|\det(A)| = n^{n/2}$ si et seulement si elle est de Hadamard.
14. Montrer que si n est impair alors $\mathcal{H}_n$ est vide. Montrer que $\mathcal{H}_2$ est non-vide.
15. Montrer que si $A \in \mathcal{E}_n^+$ alors $\det(A)$ est un entier pair.
16. En déduire que $m_3 = 4$.
17. Soit $n \geq 3$. Dans cette question on montre que si $\mathcal{H}_n$ est non-vide, alors n est un multiple de 4. Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note $C_i(A)$ le i^{e} vecteur colonne de A .
- (a) Montrer que si $\mathcal{H}_n \neq \emptyset$, il existe $H \in \mathcal{H}_n$ telle que $C_1(H) = (1, \dots, 1)$.
- (b) On prend H comme à la question précédente et on introduit les quantités suivantes :

- x le cardinal de l'ensemble des indices i tels que $H_{i,2} > 0$ et $H_{i,3} > 0$;
- y le cardinal de l'ensemble des indices i tels que $H_{i,2} > 0$ et $H_{i,3} < 0$;
- z le cardinal de l'ensemble des indices i tels que $H_{i,2} < 0$ et $H_{i,3} > 0$;
- t le cardinal de l'ensemble des indices i tels que $H_{i,2} < 0$ et $H_{i,3} < 0$

Écrire un système de quatre équations satisfaites par les variables x, y, z, t et en déduire que n est un multiple de 4.

18. Soit $H \in \mathcal{H}_n$ et soit $\tilde{H}$ la matrice définie par blocs par

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\tilde{H}$ appartient à $\mathcal{H}_{2n}$. En déduire que pour tout $k \geq 1$, l'ensemble des matrices de Hadamard de taille 2^k est non vide.

Jacques Hadamard a produit en 1893 des exemples de matrices de Hadamard de taille 12 et 20. La question de savoir si pour tout k il existe une matrice de Hadamard de taille $4k$ est ouverte depuis plus d'un siècle.

Partie 4 : Méthode probabiliste et minoration de m_n

Dans cette partie on se donne un entier $n \geq 2$ et on considère une matrice aléatoire notée M dont les coefficients $M_{i,j}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, suivant une loi uniforme dans $\{-1, 1\}$. On admettra qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ sur lequel seront définies les diverses variables aléatoires considérées et l'espérance sera notée $\mathbb{E}(\cdot)$.

On rappelle la formule

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) A_{1,\sigma(1)} \cdots A_{n,\sigma(n)},$$

où $\mathfrak{S}_n$ désigne le groupe symétrique (i.e. le groupe des bijections de $\{1, \dots, n\}$) et $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ .

19. Pour toute fonction $f : \mathcal{E}_n^+ \rightarrow \mathbb{R}$, justifier que $\mathbb{E}(f(M))$ s'exprime sous la forme

$$\mathbb{E}(f(M)) = \frac{1}{N_n} \sum_{A \in \mathcal{E}_n^+} f(A),$$

où N_n est une quantité que l'on explicitera.

20. Montrer que $\mathbb{E}(\det(M)) = 0$.

21. (a) Soient σ et τ des permutations distinctes de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que

$$\mathbb{E}(M_{1,\sigma(1)} \cdots M_{n,\sigma(n)} \cdot M_{1,\tau(1)} \cdots M_{n,\tau(n)}) = 0.$$

(b) En déduire que $\mathbb{E}(\det(M)^2) = \mathbb{E}(\det(MM^T)) = n!$

22. En déduire que $m_n \geq \sqrt{n!}$

23. Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}}.$$

L'objet de cette question est de montrer que la suite u_n converge vers une limite $\ell > 0$.

(a) Soit $v_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Faire un développement limité à l'ordre 2 de v_n quand $n \rightarrow \infty$.

(b) Démontrer le résultat annoncé.

24. Montrer que pour n assez grand on a

$$m_n \geq \left(\frac{n}{e}\right)^{n/2}.$$

Montrer également que si θ est un réel tel que $\frac{1}{e} < \theta \leq 1$, alors

$$\mathbb{P}(|\det(M)| \geq (\theta n)^{n/2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On conjecture qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout n , $m_n \geq cn^{n/2}$. Terence Tao et Van Vu ont démontré en 2005 que pour tout $\delta > 0$, avec une grande probabilité, on a

$$e^{-\delta n} \leq \frac{|\det(M)|}{\sqrt{n!}} \leq e^{\delta n}.$$

◇

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2025

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h

Le sujet est composé d'un unique problème ayant pour objet l'estimation de quantiles extrêmes. Les questions peuvent être traitées indépendamment. Il est cependant conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer. La notation tiendra largement compte de la clarté et de la précision des réponses.

Notations et rappels

Pour l'ensemble de l'énoncé, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $\mathcal{A}$ est une tribu de parties de Ω et $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité.

- ↪ Une **variable aléatoire réelle** est une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[X \leq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$.
- ↪ Soit X une variable aléatoire. La fonction $F_X(\cdot)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x])$ est la **fonction de répartition** de X . On admettra que cette fonction est nécessairement croissante et continue à droite.
- ↪ Un **vecteur aléatoire** de taille $n \geq 1$ est un n -uplet $(X_1, \dots, X_n)$ dont toutes les composantes sont des variables aléatoires réelles.
- ↪ Deux vecteurs aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont dits **égaux en loi** si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}([X_1 \leq x_1] \cap \dots \cap [X_n \leq x_n]) = \mathbb{P}([Y_1 \leq x_1] \cap \dots \cap [Y_n \leq x_n])$. L'égalité en loi est notée $(X_1, \dots, X_n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Y_1, \dots, Y_n)$.
- ↪ La loi de la variable aléatoire X est absolument continue sur $\mathbb{R}$ si la fonction de répartition $F_X(\cdot)$ est continue et dérivable (presque-partout) de dérivée $f_X(\cdot)$ qui s'intègre à 1. On a alors que pour toute fonction continue positive $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$,

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

- ↪ Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires. On dit que X_n **converge en probabilité** vers $c \in \mathbb{R}$ ($X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$) si pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - c| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. On admettra également que pour toute fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ alors $g(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(c)$.
- ↪ Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires. On dit que X_n **converge en loi** vers une loi $\mathcal{D}$ ($X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{D}$) si $\mathbb{P}(X_n \leq t) \rightarrow G(t)$ en tout point de continuité de la fonction de répartition $G(\cdot)$ de la loi $\mathcal{D}$.
- ↪ Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires que l'on supposera indépendantes et de même loi. Si ces variables aléatoires admettent une espérance égale à $\mu \in \mathbb{R}$, la **loi faible des grands nombres** assure que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu.$$

- ↪ Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires que l'on supposera indépendantes et de même loi. Si ces variables aléatoires admettent une espérance égale à $\mu \in \mathbb{R}$ et une

variance égale à $\sigma^2 > 0$, le **théorème de la limite centrale** assure que

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Présentation du problème

Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de fonction de répartition $F_X(\cdot)$. Le **quantile** d'ordre $u \in [0, 1]$ de la variable aléatoire X est donné par

$$Q_X(u) := \inf \{x \in \mathcal{X} \mid F_X(x) \geq u\},$$

où $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble des valeurs prises par la variable X . La fonction $Q_X(\cdot)$ est appelée **la fonction quantile** de X . Le **point terminal** de la loi de la variable aléatoire X est

$$\xi_X := \lim_{u \rightarrow 1-} Q_X(u) \in]-\infty, +\infty].$$

Il correspond à la plus grande valeur observable de X . Enfin, on admettra facilement que si $F_X(\cdot)$ est strictement croissante et continue (donc bijective) alors $Q_X(\cdot) = F_X^{-1}(u)$ où $F_X^{-1}(\cdot)$ est la bijection réciproque.

A l'aide des observations de $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et de même fonction de répartition $F_X(\cdot)$, l'objectif du problème est celui de l'estimation du quantile $Q_X(1 - \alpha_n)$ où (α_n) est une suite dans $[0, 1]$ telle que $n(1 - \alpha_n) \rightarrow c \in [0, 1)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Un tel quantile est dit **extrême**.

1 Premier contact avec la fonction quantile

Soit Y une variable aléatoire de fonction de répartition

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0, \\ \exp(-1/x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- 1) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y ?
- 2) Donner l'expression de la fonction quantile $Q_Y(\cdot)$ de la variable aléatoire Y .
- 3) Quel est le point terminal de la loi de Y ?

On note U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.

- 4) Donner l'expression de sa fonction de répartition $F_U(\cdot)$ ainsi que de sa fonction quantile $Q_U(\cdot)$.

Soit Z une variable aléatoire de fonction de répartition $F_Z(\cdot)$ donnée par

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x/2 & \text{si } x \in [0, 3/2[, \\ 1 & \text{si } x \geq 3/2. \end{cases}$$

- 5) En notant $Q_Z(\cdot)$ la fonction quantile de Z , donner la valeur de $Q_Z(1/2)$, de $Q_Z(3/4)$ et de $Q_Z(9/10)$.
- 6) Quel est le point terminal de la loi de Z ?

Dans les questions 7) à 9), on s'intéresse à quelques propriétés de la fonction quantile $Q_X(\cdot)$ d'une variable aléatoire quelconque X .

- 7) Montrer que si $Q_X(u) \leq x$ alors $F_X(x) \geq u$. La réciproque est-elle vraie?
- 8) En utilisant la question précédente, montrer que $Q_X(U) \stackrel{\mathcal{L}}{=} X$ où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.
- 9) En déduire que si X admet une espérance (i.e., si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$) alors

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 Q_X(u) du.$$

2 Une première tentative d'estimation

Une première idée pour estimer le quantile extrême $Q_X(1 - \alpha_n)$ est d'utiliser l'estimateur empirique de la fonction de répartition. Cet estimateur est donné par

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{ind}_{]-\infty, x]}(X_i) = \frac{\text{Card}(\{i \in \{1, \dots, n\} \mid X_i \leq x\})}{n}.$$

où $\text{ind}_A(\cdot)$ est la fonction indicatrice sur l'ensemble A . On propose alors d'estimer $Q_X(\cdot)$ par $\hat{Q}_{n,X}(\cdot) := \inf\{x \in \mathcal{X} \mid \hat{F}_n(x) \geq \cdot\}$. Nous verrons plus loin que cet estimateur fait appel à la notion de statistique d'ordre. L'objectif de la partie 2.1 est de se familiariser avec cette notion. L'étude de l'estimateur $\hat{Q}_{n,X}(\cdot)$ sera faite dans la partie 2.2.

2.1 Statistiques d'ordre

Les statistiques d'ordre $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ sont obtenues en triant par ordre croissant les valeurs prises par $X_1, \dots, X_n$. Par exemple, $X_{1,n} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est la nouvelle variable aléatoire définie pour tout $\omega \in \Omega$ par $X_{1,n}(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$.

- 10) Donner, en fonction de $F_X(\cdot)$, l'expression de la fonction de répartition de la variable aléatoire $X_{1,n}$. Même question pour la variable aléatoire $X_{n,n}$.
- 11) Si $F_X(\cdot)$ est la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0, 1]$, donner en fonction de n l'expression de $\mathbb{E}(X_{n,n})$.
- 12) Si $F_X(t) = \exp(-1/t^2)$ pour $t > 0$ et $F_X(t) = 0$ pour $t \leq 0$, donner en fonction de n l'expression de $\mathbb{E}(X_{n,n})$. On rappelle que

$$\int_0^\infty u^{-1/2} \exp(-u) du = \sqrt{\pi}.$$

Dans les questions 13) à 16), on s'intéresse aux statistiques d'ordre $U_{1,n} \leq \dots \leq U_{n,n}$ d'un échantillon $U_1, \dots, U_n$ de n variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

- 13) Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, montrer l'égalité des événements

$$[U_{k,n} \leq x] = \left[B_n(x) := \sum_{i=1}^n \text{ind}_{[x, \infty[}(U_i) \leq n - k \right].$$

- 14) Quelle est la loi de la variable aléatoire $B_n(x)$?

- 15) En déduire que

$$\mathbb{P}([U_{k,n} \leq x]) = \sum_{r=k}^n \binom{n}{r} [F(x)]^r [1 - F(x)]^{n-r}.$$

- 16) En déduire également que $\mathbb{P}([U_{k,n} \leq x]) = \mathbb{P}([U_{n-k+1,n} > 1 - x])$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

2.2 Estimateur empirique de la fonction quantile

- 17) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer l'espérance $\mathbb{E}(\hat{F}_n(x))$ et la variance $\mathbb{V}(\hat{F}_n(x))$ de la fonction de répartition empirique.
- 18) En utilisant la loi faible des grands nombres, montrer que $\hat{F}_n(x)$ converge en probabilité vers une constante que vous préciserez.
- 19) En utilisant le théorème de la limite centrale, préciser vers quelle loi converge la suite de variables aléatoires $\sqrt{n}(\hat{F}_n(x) - F(x))$.

- 20) Quelle est la valeur de $\hat{F}_n(x)$ pour $x < X_{1,n}$? Même question pour $x \geq X_{n,n}$.
- 21) Pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, quelle est la valeur de $\hat{F}_n(x)$ lorsque $X_{k,n} \leq x < X_{k+1,n}$?
- 22) En déduire que pour tout $u \in]0, 1[$, $\hat{Q}_{n,X}(u) = X_{[nu],n}$ où $[x] = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid x \leq k\}$.
- 23) Pour $n = 10$, les valeurs observées des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont

$$\begin{aligned} x_1 = 7.6 \quad x_2 = 5.7 \quad x_3 = 9.7 \quad x_4 = 4.9 \quad x_5 = 2.8 \quad x_6 = 2 \quad x_7 = 7.5 \\ x_8 = 0.5 \quad x_9 = 7.3 \quad x_{10} = 4.3 \end{aligned}$$

Quelle est la valeur observée de la médiane empirique $\hat{Q}_{n,X}(1/2)$? Celle du premier quartile empirique $\hat{Q}_{n,X}(1/4)$?

- 24) Quelle est l'expression de l'estimateur $\hat{Q}_{n,X}(1 - \alpha_n)$ lorsque $\alpha_n < 1/n$? Qu'en déduisez-vous quant à la pertinence de cet estimateur pour estimer un quantile extrême?

3 Estimation des quantiles d'une loi de Pareto

On souhaite à présent estimer les quantiles extrêmes d'une **loi de Pareto**. La fonction de répartition d'une variable aléatoire X de loi de Pareto de paramètres $\gamma > 0$ et $c > 0$ est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c, \\ 1 - (x/c)^{-1/\gamma} & \text{si } x \geq c \end{cases}$$

Dans la partie 3.1, on va s'intéresser à une famille de loi plus générale : **les lois de type Pareto**. L'estimation du quantile extrême $Q_X(1 - \alpha_n)$ sera faite dans la partie 3.2.

3.1 Lois de type Pareto

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi de type Pareto** si sa fonction de répartition est de la forme

$$F_X(x) = 1 - x^{-1/\gamma} L(x),$$

avec $\gamma > 0$ et $L(\cdot)$ une fonction à variations lentes c'est-à-dire une fonction positive telle que pour tout $t > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1.$$

En particulier, les fonctions positives qui convergent vers une constante $c > 0$ en l'infini sont des fonctions à variations lentes. On admettra enfin que le point terminal ξ_X d'une loi de type Pareto est $+\infty$.

- 25) En utilisant la définition ci-dessus, montrer que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est une fonction à variations lentes.
- 26) Lorsque la fonction de répartition $F_X(\cdot)$ est strictement croissante et continue, montrer que pour tout $u \in]0, 1[$,
- $$Q_X(u) = (1 - u)^{-\gamma} [L(Q_X(u))]^\gamma.$$
- 27) Si $L(x) \rightarrow c > 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$, donner, en fonction de $s > 0$ et $\gamma > 0$, la limite du rapport $Q_X(1 - s\alpha)/Q_X(1 - \alpha)$ lorsque $\alpha \rightarrow 0$.
- 28) Soit la variable aléatoire Y de fonction de répartition $F_Y(\cdot)$ telle que $F_Y(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $F_Y(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x > 0$. Quelle est la limite de $x^2(1 - F_Y(x))$ lorsque $x \rightarrow \infty$.
- 29) En déduire que cette variable aléatoire Y suit une loi de type Pareto (vous préciserez la valeur de γ ainsi que l'expression de la fonction à variations lentes).
- 30) Calculer l'espérance de Y .

3.2 Estimateurs de Hill et de Weissman

Dans cette partie, on suppose que X suit une loi de Pareto de paramètres $\gamma > 0$ et $c > 0$. La loi de Pareto est évidemment une loi de type Pareto correspondant au cas où la fonction à variations lentes $L(\cdot)$ est constante égale à c .

Dans toute la suite, on notera $U_{1,n} \leq \dots \leq U_{n,n}$ les statistiques d'ordre associées à des variables aléatoires indépendantes $U_1, \dots, U_n$ suivant chacune la loi uniforme sur $[0, 1]$. On admettra les résultats suivants.

- (R1) Soit un entier $n \geq 1$, on note $E_1, \dots, E_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle standard c'est-à-dire telles que pour tout $i = 1, \dots, n + 1$,

$$\mathbb{P}([E_i \leq x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \exp(-x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Les statistiques d'ordre $U_{1,n} \leq \dots \leq U_{n,n}$ vérifient l'égalité en loi

$$(U_{i,n}, i = 1, \dots, n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(\sum_{j=1}^i E_j / \sum_{j=1}^{n+1} E_j, i = 1, \dots, n \right).$$

- (R2) $(X_{1,n}, \dots, X_{n,n}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Q_X(U_{1,n}), \dots, Q_X(U_{n,n})).$

- (R3) $(U_{i,n}, i = 1, \dots, n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (1 - U_{n-i+1,n}, i = 1, \dots, n).$

- (R4) Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{D}$ et si $\epsilon_n \rightarrow 0$ alors $\epsilon_n X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

La première étape pour estimer un quantile extrême d'une loi de Pareto est l'estimation du paramètre $\gamma > 0$. Pour ce faire, on utilise l'**estimateur de Hill** défini par

$$\hat{\gamma}_n(k_n) := \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{X_{n-i+1,n}}{X_{n-k_n,n}} \right).$$

où (k_n) est une suite d'entiers dans l'ensemble $\{1, \dots, n-1\}$ telle que $k_n \rightarrow \infty$ et $n/k_n \rightarrow \infty$.

31) Montrer que $(\ln(X_{n-i+1,n}), i = 1, \dots, n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (c(1 - U_{n-i+1,n})^{-\gamma}, i = 1, \dots, n)$.

32) En utilisant le résultat (R3), en déduire que

$$\hat{\gamma}_n(k_n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{\gamma}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \ln \left[\left(\frac{U_{i,n}}{U_{k_n+1,n}} \right)^{-1} \right].$$

33) En utilisant le résultat (R1), montrer que

$$\left(\frac{U_{i,n}}{U_{k_n+1,n}}, i = 1, \dots, k_n \right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (U_{i,k_n}, i = 1, \dots, k_n).$$

34) En déduire que

$$\hat{\gamma}_n(k_n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{\gamma}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \ln(U_i^{-1}).$$

35) Si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, quelle est la loi de la variable aléatoire $\ln(1/U)$?

36) En déduire, en utilisant la loi faible des grands nombres et le théorème de la limite centrale, les convergences

$$\hat{\gamma}_n(k_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \gamma \text{ et } k_n^{1/2}(\hat{\gamma}_n(k_n) - \gamma) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma^2),$$

où $\mathcal{N}(0, \gamma^2)$ est une loi normale d'espérance nulle et de variance égale à γ^2 .

On estime finalement le quantile extrême d'une loi de Pareto par

$$\hat{Q}_{n,X}^{(W)}(1 - \alpha_n) := X_{n-k_n,n} \left(\frac{n\alpha_n}{k_n} \right)^{-\hat{\gamma}_n(k_n)}.$$

Cet estimateur est connu sous le nom d'**estimateur de Weissman**.

37) Montrer que $X_{n-k_n,n} \stackrel{\mathcal{L}}{=} cU_{k_n+1,n}^{-\gamma}$.

38) En utilisant le résultat (R1) et la loi faible des grands nombres, montrer que

$$\frac{n}{k_n} U_{k_n+1,n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

39) En déduire que

$$X_{n-k_n,n} \left(\frac{n}{k_n} \right)^{-\gamma} \xrightarrow{\mathbb{P}} c.$$

40) En utilisant (R4), montrer que si $k_n^{-1/2} \ln(k_n/(n\alpha_n)) \rightarrow 0$ alors

$$\left(\frac{n\alpha_n}{k_n} \right)^{\gamma - \hat{\gamma}_n(k_n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

41) Conclure sur la convergence en probabilité de $\hat{Q}_{n,X}^{(W)}(1 - \alpha_n)/Q_X(1 - \alpha_n)$.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2025

Épreuve de français

Durée : 2h

Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas*, *c'est-à-dire*, *le plus grand*, comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé.

Vous utiliserez la feuille préremplie facilitant le comptage des mots. N'oubliez pas d'ajouter votre N° BÉCÉAS en haut de chaque page.

On pourrait ici reprendre la classique distinction établie par Riesman¹ entre trois étapes successives dans l'évolution générale des civilisations. Jusqu'à une époque relativement récente, c'est-à-dire surtout dans les sociétés archaïques antiques et médiévales marquées par une économie de pénurie où l'instinct grégaire et celui de la survie régnaient par nécessité, c'était la tradition qui façonnait l'idéal des individus. Chacun d'eux avait sa place dans le groupe comme l'abeille dans sa ruche, avec sa fonction, son but et, en vérité, il n'avait pas à se poser de problèmes. C'est ce même type de vie collective que Bergson² a bien décrite sous le nom de « société close ». Dans ce contexte, on n'avait guère à se demander en quoi consistait le bonheur, ou bien si l'on avait le loisir d'y réfléchir, on ne songeait qu'à une sagesse valable pour tous et finalement à une sorte de félicité liée à l'accomplissement de la fonction sociale ou, à la rigueur, humaine telle que la voulait la société.

La seconde phase, selon Riesman, commence à l'époque de la Renaissance, et c'est elle qui se prolonge encore dans la plupart de nos pays, sauf dans ceux où, comme c'est le cas dans les régions les plus hautement industrialisées des Etats-Unis, la civilisation de masse fait déjà poindre la troisième étape de l'évolution. La différence entre cette seconde forme de civilisation et la première, c'est que l'économie de pénurie y est peu à peu surmontée, en même temps que la population s'accroît. Le poids de la tradition, que justifiaient l'immobilisme du groupe et sa lutte collective pour la survie, est peu à peu rejeté, et quand on entrevoit le règne de l'abondance et de l'expansion, chacun se lance pour soi-même dans l'aventure de la vie. Bref, c'est le triomphe de l'individualisme, que le XVIII^e siècle érigea en doctrine.

On comprend que les théories du bonheur y aient fleuri, aussi diverses que prometteuses. Il n'y a plus de règles rigides, plus de ligne de conduite assignée à chacun, de génération en génération, mais seulement des orientations générales données par la famille et qui laissent une bonne marge d'action pour que l'intérêt de chacun s'accommode de celui des autres; il n'y a plus une collectivité, mais des personnes qui ont à se forger leur propre impératif, leur but et leurs moyens, et à se faire leur place selon leur talent, leur ambition, leur chance. La personnalité de base ne donne plus de réponse stéréotypée à la question du bonheur. Ce n'est pas parce que vous êtes français ou anglais que vous saurez où le chercher. L'éducation vous donne surtout la conscience que vous en êtes le maître.

Mais voici que commence la troisième forme de la société humaine, celle qui est au-delà du traditionalisme et de l'individualisme, celle de la masse. Dans des nations hautement industrialisées, plus particulièrement dans les très grandes villes, surtout dans le Nouveau Monde et déjà partiellement chez nous, on en voit se dessiner les traits principaux, et c'est en tout cas, si l'on en croit Riesman, vers ce type de société que nous sommes en marche. L'homme ne sera plus formé par une éducation rituelle stéréotypée comme il l'était dans les sociétés archaïques semblables à la ruche ou à la fourmilière; il ne sera plus fortifié dans son individualité par une imprégnation familiale comme il l'était dans les sociétés des siècles derniers. Il sera une sorte de robot pensant, soumis à l'action des moyens de communication, à la télévision, à la publicité. Son caractère sera façonné non dans le foyer de ses parents mais dans le milieu social, celui des gens de même âge, de même profession. Modelé sans le savoir par une collectivité apparemment débonnaire, il sera autant que possible semblable à ses voisins, efficace et sociable comme il se doit, et n'aura guère d'autre vocation que de se perdre dans la foule. Son idéal sera d'être intégré dans le monde moderne, d'y acquérir

1. Riesman : sociologue américain.

2. Bergson : philosophe français (1859-1941)

le confort et d'étendre ses relations. Même dans ses loisirs, il renoncera à sa personnalité et « suivra le mouvement ». Bref, la formule de l'homme heureux de demain, ce sera le conformisme.

La personnalité de base, c'est-à-dire l'empreinte culturelle, est donc en train de redevenir aussi forte qu'elle l'était dans les sociétés archaïques, mais d'une tout autre manière. L'individu, en effet, n'est plus transcendé par le groupe, il n'est pas plus soutenu par le mécanisme des traditions et pas plus arraché à sa solitude qu'il ne l'était dans la phase individualiste; mais en même temps il n'a plus vraiment son libre arbitre ni surtout son originalité, il n'est ni un élément d'une totalité organisée ni un centre de décision personnelle, mais le reflet indéfiniment répété d'un être social anonyme.

Une troisième question que nous avons déjà effleurée, pourrait ensuite être suggérée par le rapport entre l'individu et la culture : quelle place est faite dans chaque type de civilisation à ceux qui ne veulent pas s'y conformer, à ceux qui vont à contre-courant. Sont-ils soutenus dans leur quête d'indépendance, ou bien « exclus de la horde »? C'est le problème de la tolérance ou de la rigidité des cultures. Tout homme, selon le vieil adage, prend son plaisir où il le trouve. Sans doute pourrait-on dire que chacun aussi cherche son bonheur où il veut, mais à condition toutefois que la société le lui permette. C'est ainsi que, dans une civilisation purement dionysienne, les gens de caractère doux et paisible peuvent avoir du mal à trouver leur place, tandis que dans une organisation apollinienne les turbulents, les arrivistes, les violents sont mis en quarantaine. Or, peut-on être heureux si l'on est contraint de refouler son caractère naturel? Et comment le garçon calme et rêveur qui a eu la malchance de naître chez les Dobuans où toute l'éducation tend à faire de farouches guerriers et à développer l'agressivité des mâles, comment serait-il heureux puisqu'il ne peut concevoir le bonheur que dans la paix et l'harmonie, et que son entourage méprise ou persécute ceux qui ont un tel idéal et leur interdit toute félicité?

Par contre, Dieu merci, il est des cultures qui, plus souples, font place aux individualités aberrantes, à celles qui ne sont pas conformes à la personnalité de base majoritaire. Sans doute, comme le souhaite Ruth Bénédict, le progrès des civilisations devrait-il aller dans ce sens libéral pour le grand bien de tous. Il faut que la nation bien policée et pacifique trouve le moyen d'utiliser les bagarreurs, de canaliser leur violence sans l'étouffer et de laisser leur personnalité s'épanouir librement dans un domaine où elle peut avoir son utilité; et le peuple animé par un vouloir-vivre puissant et un grand esprit de compétition doit savoir inversement tirer profit des esprits rêveurs et poétiques, des paisibles et des sages qui cherchent leur bonheur dans un autre domaine que celui de la collectivité dionysienne.

Jean Cazeneuve, Bonheur et civilisation, 1966.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2025

Épreuve d'anglais

Durée : 2h

L'épreuve est constituée de deux parties : un résumé et une traduction. Vous rédigerez ces deux parties sur **deux copies séparées**, sur lesquelles vous indiquerez respectivement « Anglais / résumé » et « Anglais / traduction ».

1 Summarize this text in English in 200 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

Planned blackouts are becoming more common - and not having cash on hand could cost you

Published in The Conversation, April 1, 2025

Are you prepared for when the power goes out? To prevent massive wildfires in drought-prone, high-wind areas, electrical companies have begun pre-emptively shutting off electricity. These planned shutdowns are called public safety power shutoffs, abbreviated to PSPS, and they're increasingly common. So far this year, we've seen them in Texas, New Mexico and California.

Unlike regular power failures, which on average last only about two hours while a piece of broken equipment is repaired, a PSPS lasts until weather conditions improve, which could be days. And these shutoffs come at a steep price. In 2010 alone, they cost California over US\$13 billion. A 2019 analysis of shutoffs in Placer County, California, found that they harmed 70% of local businesses.

I am a business school professor who studies how people pay for things, including during emergencies. As I point out in my new book "The Power of Cash: Why Using Paper Money is Good for You and Society," many people have abandoned paper money and switched to electronic payments such as credit cards and mobile apps. This can become a big problem during an emergency, since these systems need electricity to operate. The switch to electronic payments is making the world less resilient in the face of increasing numbers of major natural disasters.

So if a public safety power shutoff strikes and you don't have any cash, you may be doubly vulnerable. On the other hand, keeping cash can protect you – and not just you and your family, but also local businesses and your community. After all, keeping the economy moving during shutoffs reduces the financial damage they cause.

Why do they keep turning off the power, anyway? It's all about risk.

The world has experienced a number of very destructive wildfires recently. In 2025, large parts of Los Angeles burned to the ground, with over 18,000 buildings destroyed or damaged. In 2023, wildfires in Hawaii killed over 100 people. Massive wildfires have also occurred recently in South Korea, Portugal and Australia.

Governments, people whose houses burned and insurance companies are all looking for someone to blame and pay for the damage. Climate change, which is increasing the world's average temperatures and drying out trees and grass, is setting the conditions. Since Mother Nature cannot be sued, utilities make handy scapegoats with deep pockets. Electrical utilities are sued because their power lines, transformers and other equipment often start blazes.

So to prevent lawsuits as well as fires, power companies are increasingly turning off the power when the conditions are ripe for a catastrophic blaze. There's no uniform set of standards for when to impose a shutdown, but in general, power companies do it when there are hot, dry and windy conditions. For example, a PSPS is triggered in Hawaii if there's a drought, wind gusts are over 45 miles per hour and relative humidity is under 45%.

Power shutoffs are a relatively new idea. They were proposed in California in 2008 and first allowed in 2012.

Since then, power companies across the entire western U.S. from Texas to Hawaii have adopted these plans. Shutoff plans also stretch from southern border states such as Arizona to northern border states such as Idaho and Montana.

Shutting off the power is a huge problem, since it causes massive disruption to communities. People depend on power to run medical equipment, work and keep communities safe. Even people with a desperate need for electricity, such as those on medical life support, are not immune to a safety shutoff.

As the world warms, the chance of being caught in a pre-emptive power shutoff increases. What can you do to minimize the impact?

Having solar panels won't protect you: Utilities shut off customers with solar panels to block those panels from pushing power onto the grid, since the whole goal is to shut off the grid. The only way for you to still have power is to buy a battery storage system and a transfer switch, which allows you to take your system completely off the grid. But this is very expensive.

Getting a portable generator is only a partial solution for a multiday shutoff, since most last only six to 18 hours on a single tank of gas. Plus, generators run very hot, which creates its own fire risk.

Another way to minimize the impact of both a power shutoff and a wildfire is to create a small disaster relief kit, or "go bag." Creating one is relatively inexpensive. It should contain key items such as water, your medicines, some shelf-stable food – and importantly, some cash. Even some government websites forget to mention this.

It's also important to use paper money before a shutoff happens. I have all too frequently seen gas station attendants, supermarket checkout clerks and restaurant servers have no idea how to handle cash.

Recently at my local supermarket, for example, I paid with a \$20 bill. The cashier had to ask another employee which kinds of coins to use to make change. If people don't know how to handle cash during normal times, it ceases to be useful during emergencies.

As the world warms, public safety power shutoffs will occur more frequently. The shutoffs clearly highlight the trade-off between economic and social disruption versus preventing dangerous wildfires. These shutoffs show there are no easy solutions – only hard choices.

There are a few sensible and easy steps to take to reduce the impact of these shutoffs. One is to understand that during one of the very moments you might really need to spend money, modern payment systems fail. Holding and frequently using old-fashioned cash is a simple and low-cost way to protect yourself and your family.

2 Translate the following text into French

Apollonia trial begins, billion-euro real estate scam

Source: AFP - March 31, 2025

A real estate fraud involving nearly a billion euros, with hundreds of victims defrauded while hoping to build up their assets at a lower cost, the Apollonia trial opened late Monday morning in Marseille, March 31, and will last for more than two months.

Among the main defendants are the asset management company Apollonia, based in Aix-en-Provence and its founders: a former shopkeeper, his wife, a beautician by profession, and their son, who was at one time in charge of the company.

The court's extraordinary trial room has rarely been so full, with black robes in the first seven rows and dozens of victims who made the trip, most of them now retired. Some thirty boxes at the feet of the presiding judge also testify to the depth of a case file that includes some 760 civil parties and 110 lawyers.

Apollonia offered to acquire lots of real estate programs eligible for the tax-advantaged professional furnished rental scheme.

The mechanism seemed all the more attractive because the income from renting out the properties were supposed to guarantee clients the self-financing of the acquisitions, allowing them to build up a significant amount of assets as they approach retirement.

But the promised income was not forthcoming.

Sentenced in particular for organized fraud, aggravated money laundering, forgery and use of forged documents, they risk up to 10 years in prison and a fine of one million euros.