Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2026

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Rappel : Pour toutes les épreuves, les appareils électroniques (calculatrices, téléphones, traductrices), les casques, et les dictionnaires, ainsi que tout document, sont interdits.

Problème 1 : analyse.

Dans ce problème on établit un développement asymptotique de

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$$

quand $n \to \infty$.

On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. On définit f_n sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+t^n}$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite ℓ.

3. En utilisant un encadrement de $\ln(1+u)$, montrer que $\int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n}\right)$ quand $n \to \infty$.

4. En déduire un équivalent de $I_n - \ell$.

5. Démontrer avec précision que $\int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)}$.

6. Montrer la convergence de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ et calculer sa somme.

7. En déduire que $\int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ quand $n \to \infty$ et former un développement asymptotique à l'ordre $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de I_n.

◇

Problème 2 : algèbre linéaire et équations différentiellles.

Partie 1 : Pseudo-inverse d'une matrice

On note $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'espace des matrices de taille $p \times q$ à coefficients réels, et on pose $\mathrm{M}_d(\mathbb{R}) = \mathrm{M}_{d,d}(\mathbb{R})$. On pourra se permettre d'identifier une matrice $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme qui lui est associé dans la base canonique (de sorte que des notions comme le noyau, l'image ou le rang de A prennent sens). La transposée d'une matrice A est notée $A^\top$ et sa trace est notée $\mathrm{tr}\,(A)$. Le groupe des matrices réelles inversibles de taille $d \times d$ est noté $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$.

Pour une matrice $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$, on dit que $B \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ est un pseudo-inverse de A si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) $AB = BA$;

(ii) $ABA = A$;

(iii) $BAB = B$.

1. Montrer que si A admet un pseudo-inverse alors $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^2)$.

Réciproquement on suppose que $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ est telle que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^2) = r \geq 1$. Soit a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ canoniquement associé à A.

2. Montrer que $\mathbb{R}^d = \ker(a) \oplus \text{Im}\,(a)$.

3. Montrer qu'il existe $C \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ tels que

$$A = P \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

4. En déduire l'existence d'un pseudo-inverse de A.

5. On veut montrer que le pseudo-inverse est unique. Soit B un pseudo-inverse de A et b l'endomorphisme canoniquement associé à B.

(a) Montrer que $\ker(a)$ et $\text{Im}\,(a)$ sont stables par b.

(b) Exprimer la restriction de b à $\text{Im}\,(a)$ en fonction de celle de a, et montrer que $b|_{\ker(a)} = 0$.

(c) Conclure.

6. Dans cette question on suppose que $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ est de rang 1.

(a) Montrer qu'il existe X et Y dans $M_{d,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = XY^\top$.

(b) Montrer que $A^2 = (\text{tr}\,(A))A$.

(c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $\text{tr}\,(A)$ pour que A admette un pseudo-inverse.

Pour $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$, on définit l'indice de A, noté ν, comme le plus petit entier k tel que $\text{rang}(A^k) = \text{rang}(A^{k+1})$. On note toujours a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ canoniquement associé à A.

7. Montrer que ν existe et est compris entre 0 et d.

(*Indication : on pourra s'intéresser à la suite* $(\text{Im}\,(a^k))_{k\geq 0}$.)

8. Montrer que $\mathbb{R}^d = \ker(a^\nu) \oplus \text{Im}\,(a^\nu)$.

9. Montrer qu'il existe $C \in \mathrm{GL}_\nu(\mathbb{R})$, $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ et une matrice $N \in \mathrm{M}_{d-\nu}(\mathbb{R})$ nilpotente tels que

$$A = P \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Avec les notations de la question précédente, on pose $A^\# = P \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

10. Montrer qu'on a les relations $AA^\# = A^\# A$, $A^\# AA^\# = A^\#$ et $A^{\nu+1}A^\# = A^\nu$.

11. (a) Montrer que si $M \in M_k(\mathbb{R})$ est une matrice inversible, alors M^{-1} est un polynôme en M.

(b) En déduire que $A^{\#}$ est un polynôme en A.

Partie 2 : Application aux équations différentielles linéaires

Dans cette partie, on considère deux matrices A et B dans $\mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ et on s'intéresse à l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad Ax' + Bx = 0,$$

où $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ est une fonction dérivable (ici on a identifié $\mathbb{R}^d$ avec l'espace des matrices colonnes $\mathrm{M}_{d,1}(\mathbb{R})$).

On dira qu'une condition initiale x_0 est *consistante* si (E) admet une solution telle que $x(0) = x_0$, et on dira que l'équation différentielle (E) est *bien posée* si pour toute condition initiale x_0 consistante, (E) admet une unique solution telle que $x(0) = x_0$.

12. Dans cette question, on suppose que A est inversible. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, (E) admet une unique solution telle que $x(0) = x_0$, que l'on exprimera à l'aide de l'exponentielle de matrice.

13. Dans cette question on suppose que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer un sous-espace vectoriel V tel que (E) admet une solution telle que $x(0) = x_0$ si et seulement si x_0 appartient à V.

(b) Cette solution est-elle unique ?

Si A et B sont de nouveau des matrices $d \times d$ arbitraires, on considère l'hypothèse suivante

$$\text{(H)} \qquad \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lambda A + B \text{ est inversible.}$$

14. Montrer que si A ou B est inversible, alors (H) est satisfaite.

On suppose dorénavant que (H) est satisfaite, et on pose alors $\widehat{A} = (\lambda A + B)^{-1} A$ et $\widehat{B} = (\lambda A + B)^{-1} B$.

15. Montrer que l'équation (E) est bien posée si et seulement si l'équation $\widehat{A}x' + \widehat{B}x = 0$ est bien posée.

16. Montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$, un entier ν tel que $0 \leq \nu \leq d$, une matrice $C \in \mathrm{GL}_\nu(\mathbb{R})$, et une matrice $N \in \mathrm{M}_{d-\nu}(\mathbb{R})$ nilpotente tels que

$$\widehat{A} = P \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } \widehat{B} = P \begin{pmatrix} I - \lambda C & 0 \\ 0 & I - \lambda N \end{pmatrix} P^{-1}.$$

17. Montrer que si z est une solution de l'équation différentielle $Nz' + (I - \lambda N)z = 0$ alors $z = 0$.

(*Indication : on pourra commencer par observer que si k est tel que* $N^k = 0$ *alors* $N^{k-1}z = 0$.)

18. Montrer que l'équation (E) est bien posée.

Remarque : on peut montrer que réciproquement, si (E) est bien posée, alors (H) est satisfaite.

◇◇◇

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2026

Épreuve de français

Durée : 2h

Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas, c'est-à-dire, le plus grand*, comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé.

Vous utiliserez la feuille préremplie facilitant le comptage des mots. N'oubliez pas d'ajouter votre N° BÉCÉAS en haut de chaque page.

François Jacob, *La logique du vivant, Une histoire de l'hérédité* [1976], tel Gallimard, 2023, p. 99-102 (922 mots).

« L'installation du concept d'organisation au cœur du monde vivant entraîne plusieurs conséquences. La première est celle de la totalité de l'organisme qui apparaît désormais comme un ensemble intégré de fonctions, donc d'organes. Ce qu'il faut considérer dans un être, ce n'est jamais chacune des parties prise en particulier, mais le tout, « la composition de chaque organisation dans son ensemble, dit Lamarck, c'est-à-dire dans sa généralité »[1] . Si l'on peut reconnaître aux parties une valeur et une importance inégales, c'est toujours en se référant à la totalité. Cela se manifeste avec le plus de clarté dans les formes les plus simples de l'organisation. « C'est particulièrement chez les insectes, dit Lamarck, que l'on commence à remarquer que les organes essentiels à l'entretien de la vie sont répartis presque également et la plupart situés sur toute l'étendue du corps, au lieu d'être isolés dans des lieux particuliers, comme cela a lieu dans les animaux plus parfaits »[2].

Ensuite, le concept d'organisation conduit à développer ce qu'avait déjà entrevu le XVIII^{ème} siècle, l'idée que le vivant n'est pas une structure isolée dans le vide, mais qu'il s'insère dans la nature avec laquelle il noue des relations variées. Pour que vive un être, pour qu'il respire et se nourrisse, il faut un accord entre les organes chargés de ces fonctions et les conditions extérieures. Il faut que l'organisation réagisse à ce que Lamarck appelle « les circonstances ». Par circonstances s'entendent les habitats de la terre ou de l'eau, les sols, les climats, les autres formes vivantes qui entourent l'organisme, bref toute la « diversité des milieux dans lesquels ils habitent ».

Enfin avec le concept d'organisation s'introduit une coupure radicale dans les objets de ce monde. Jusqu'alors, les corps de la nature se répartissaient traditionnellement en trois règnes : animal, végétal et minéral. Par cette division, les choses se trouvaient pour ainsi dire sur le même pied que les êtres, ce que justifiaient les transitions insensibles reconnues aussi bien entre minéral et végétal qu'entre végétal et animal. Avec Pallas, Lamarck, Vicq d'Azyr, de Jussieu, Goethe, la fin du XVIII^{ème} siècle redistribue les « productions de la nature » non plus en trois, mais en deux groupes, que distingue le seul critère de l'organisation. « On remarque d'abord, dit Lamarck[3] dès 1778, un grand nombre de corps composés d'une matière brute, morte, et qui s'accroît par la juxtaposition des substances qui concourent à sa formation, et non par l'effet d'aucun principe interne de développement. Ces êtres sont appelés en général être inorganiques ou minéraux…D'autres êtres sont pourvus d'organes propres à différentes fonctions et jouissent d'un principe vital très marqué et de la faculté de reproduire leur semblable. On les a compris sous la dénomination générale d'êtres organiques ». Dorénavant, il n'existe plus que deux classes de corps. L'inorganique, c'est le non-vivant, l'inanimé, l'inerte. L'organique, c'est ce qui respire, se nourrit, se reproduit ; c'est ce qui vit et qui est 'nécessairement assujetti à la mort' »[4]. L'organisé s'identifie au vivant. Les êtres se séparent définitivement des choses.

1. Histoire Naturelle des Animaux sans Vertèbres, introd., 1815-1822, t. 1, p. 130-131.
2. Philosophie zoologique, T. 1, p. 189
3. Flore française, t. 1, p. 1-2.
4. Philosophie zoologique, t. 1, p. 106.

Une fois isolés des autres corps mais réunis entre eux par l'organisation, le problème de la genèse du monde vivant ne se pose plus dans les mêmes termes que celle du monde inanimé. On peut, comme le propose Lamarck, non plus faire créer simultanément dans leur complexité toutes, ou la plupart, des formes vivantes mais les faire dériver les unes des autres par une série de variations successives. Grâce à l'accumulation des effets exercés sur la structure même des organismes par la tendance de la nature à la progression, la série continue des êtres dans l'espace peut alors résulter d'une série continue de transformations dans le temps. L'émergence des êtres et leur variété reposent ainsi sur une caractéristique du vivant lui-même : son pouvoir de variation et d'adaptation.

Peu à peu se dégage l'objet d'une science qui étudie non plus les végétaux ou les animaux en tant que constituant certaines classes parmi les corps de la nature, mais l'être vivant à qui une certaine organisation confère des propriétés singulières. Pour désigner cette science, Lamarck, Treviranus et Oken utilisent presque simultanément le terme de Biologie. « Tout ce qui est généralement commun aux végétaux et aux animaux, dit Lamarck[5], comme toutes les facultés qui sont propres à chacun de ces êtres sans exception doit constituer l'unique et vaste objet de La Biologie : car les deux sortes d'êtres que je viens de citer sont tous essentiellement des corps vivants et ce sont les seuls êtres de cette nature qui existent sur notre globe. Les considérations qui appartiennent à la Biologie sont donc tout à fait indépendantes des différences que les végétaux et les animaux peuvent offrir dans leur nature, leur état et les facultés qui peuvent être particulières à certains d'entre eux ». Ainsi pourvue d'un nom et d'un objet d'étude, la science naturelle va progressivement, au cours du XIX^{ème} siècle, dégager ses concepts et ses techniques propres. Par-delà les différences de formes, de propriétés d'habitat, il s'agit de déceler les caractères communs au vivant et de donner un contenu à ce qui, désormais, s'appelle la vie ».

5. Histoire Naturelle des Animaux sans Vertèbres, t. 1, p. 49-50.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

100 mots

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

180 mots

....

....

....

....

200 mots

....

....

....

....

220 mots

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2026

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Rappel : Pour toutes les épreuves, les appareils électroniques (calculatrices, téléphones, traductrices), les casques, et les dictionnaires, ainsi que tout document, sont interdits.

Soit λ un nombre réel strictement positif. Ce problème porte sur l'équation fonctionnelle dite "équation du pantographe"

$$f'(x) = af(\lambda x) + bf(x) \tag{P}$$

où f est une fonction dérivable définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, et a et b sont des nombres réels fixés.

On s'intéressera aussi au problème avec condition initiale

$$f'(x) = af(\lambda x) + bf(x), \quad f(0) = y_0, \tag{P_{y_0}}$$

où y_0 est un réel fixé.

Questions préliminaires.

1. On suppose dans cette question que $a = 0$. Étudier l'existence et l'unicité des solutions de (P) définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = y_0$, où y_0 est un réel fixé.

Dorénavant on supposera toujours $a \neq 0$.

2. Montrer que toute solution de (P) définie sur $\mathbb{R}$ tout entier est de classe C^∞.

3. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \varphi(x) = e^{-1/x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}.$$

(a) Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et que pour tout $n \geq 0$ il existe un polynôme réel P_n tel que sur $\mathbb{R}^*$ la dérivée n^{e} de φ vérifie la relation

$$\varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}.$$

(b) Établir le théorème suivant : si h est une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$ et dérivable sur $]\alpha, \beta]$, et telle que h' admet une limite ℓ quand $x \to \alpha^+$, alors h est dérivable en α et $h'(\alpha) = \ell$.
(*Indication : on pourra utiliser le théorème des accroissements finis.*)

(c) En déduire que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n \geq 0$ on a $\varphi^{(n)}(0) = 0$.

(d) Utiliser la fonction φ pour construire pour tous $\alpha < \beta$ dans $\mathbb{R}$ une fonction ψ de classe C^∞ sur $[\alpha, \beta]$, strictement positive sur $]\alpha, \beta[$ et telle que pour tout $n \geq 0$, $\psi^{(n)}(\alpha) = \psi^{(n)}(\beta) = 0$.

(e) Par un argument d'intégration, en déduire que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, il existe une fonction χ de classe C^∞ sur $[\alpha, \beta]$ telle que $\chi(\alpha) = u$, $\chi(\beta) = v$ et pour tout $n \geq 1$, $\chi^{(n)}(\alpha) = \chi^{(n)}(\beta) = 0$.

4. Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle de la forme $]0, \delta]$ avec $\delta > 0$. On suppose que f' est bornée au voisinage de 0 et on se propose de montrer que f admet une limite en 0.

(a) Démontrer le résultat quand f' est positive.

(b) Traiter le cas général.

Partie 1 : Le cas $0 < \lambda < 1$.

Dans toute cette partie on suppose que $0 < \lambda < 1$. On rappelle que a est supposé non nul.

5. Montrer que si f est une solution de (P) développable en série entière de la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ dans un voisinage de l'origine, alors les coefficients α_n vérifient la relation de récurrence

$$n\alpha_n = a\alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + b\alpha_{n-1},\ \forall n \geq 1.$$

6. Inversement, si $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ est une suite satisfaisant cette relation de récurrence, déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \alpha_n x^n$.

7. Démontrer que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une solution de (P) définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = y_0$.

8. Étant donné $A > 0$, on considère l'espace vectoriel $\mathscr{C}([-A, A], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[-A, A]$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty = \sup\left\{\left|f(x)\right|,\ x \in [-A, A]\right\},$$

pour toute $f \in \mathscr{C}([-A, A], \mathbb{R})$. Justifier que $\|\cdot\|_\infty$ est bien définie et définit une norme sur $\mathscr{C}([-A, A], \mathbb{R})$.

9. Pour $g \in \mathscr{C}([-A, A], \mathbb{R})$, on pose

$$T_A g : x \mapsto y_0 + \int_0^x (ag(\lambda t) + bg(t))\mathrm{d}t.$$

Montrer que si f est une solution de (P_{y_0}) sur $[-A, A]$ alors $T_A f = f$, et réciproquement que si $f \in \mathscr{C}([-A, A], \mathbb{R})$ vérifie $T_A f = f$ alors f est solution de (P_{y_0}).

10. Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour toute paire de fonctions $g_1, g_2 \in \mathscr{C}([-A, A], \mathbb{R})$, on a

$$\|T_A g_1 - T_A g_2\| \leq \frac{1}{2}\|g_1 - g_2\|.$$

11. En déduire que le problème (P_{y_0}) admet une unique solution sur $[-A, A]$.

12. Supposons que B soit un réel strictement positif tel que le problème (P_{y_0}) admet au plus une solution sur $[-B, B]$. Montrer que le problème (P_{y_0}) admet au plus une solution sur $\left[-\frac{B}{\lambda}, \frac{B}{\lambda}\right]$.

(*Indication : on pourra montrer que si f_1 et f_2 sont des solutions de (P_{y_0}), alors $f_1 - f_2$ satisfait une équation différentielle homogène du premier ordre.*)

13. Conclure que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, le problème (P_{y_0}) admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : Le cas $\lambda > 1$.

On suppose maintenant que $\lambda > 1$ (et toujours $a \neq 0$). Notre objectif est de construire des solutions de (P) sur $[0,+\infty[$. Une telle solution doit être de classe C^∞ sur $]0,\infty[$ par un argument similaire à celui de la question 2.

14. Montrer que l'équation (P) n'admet pas de solution non nulle développable en série entière au voisinage de l'origine.

15. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et on suppose que f est une solution de (P) de classe C^∞ sur un intervalle de la forme $]x^*,\infty[$, avec $x^* \leq x_0$. Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a

$$f^{(n+1)}(x_0) = a\lambda^n f^{(n)}(\lambda x_0) + b f^{(n)}(x_0).$$

16. Soit g une fonction de classe C^∞ sur $[x_0, \lambda x_0]$ telle que $g(\lambda x_0) = (-b/a)g(x_0)$ et pour tout $n \geq 1$, $g^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(\lambda x_0) = 0$. Une telle fonction existe d'après la question 3. Montrer que g s'étend à l'intervalle $[\lambda x_0, \lambda^2 x_0]$ en une solution f de classe C^∞ de (P) telle que $f(\lambda^2 x_0) = (-b/a)f(\lambda x_0)$. Déterminer $f^{(n)}(\lambda^2 x_0)$ pour $n \geq 1$.

17. En déduire que toute fonction C^∞ sur $[x_0, \lambda x_0]$ telle que $f(\lambda x_0) = (-b/a)f(x_0)$ et $f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(\lambda x_0) = 0$ s'étend en une solution de (P) sur $[x_0, +\infty[$.

18. Soit maintenant une fonction g de classe C^1 sur $[x_0, \lambda x_0]$ telle que $g(\lambda x_0) = (-b/a)g(x_0)$ et $g'(x_0) = 0$. En résolvant une équation différentielle bien choisie, montrer que g s'étend en une solution f de (P) sur $[x_0/\lambda, \lambda x_0]$.

(*Note : on s'assurera bien du fait que l'extension est dérivable au point x_0.*)

19. Conclure que toute fonction g de classe C^∞ sur $[x_0, \lambda x_0]$ telle que $g(\lambda x_0) = (-b/a)g(x_0)$ et pour tout $n \geq 1$, $g^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(\lambda x_0) = 0$ s'étend en une solution f de (P) sur $]0,+\infty[$.

20. On peut montrer que pour l'extension définie à la question 19, on a une inégalité de la forme

$$\left| \frac{f(x_0/\lambda^{k+1})}{f(x_0/\lambda^k)} - 1 \right| \leq \frac{K}{\lambda^k}$$

sur $[x_0/\lambda^{k+1}, x_0/\lambda^k]$ où K est une constante indépendante de x_0, et $k \geq 0$ est arbitraire. Montrer alors que f' est bornée au voisinage de 0, et en déduire que f admet une limite en 0.

◇

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2026

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h

Le sujet est composé d'un unique problème étudiant la reconstruction d'une mesure de probabilité à partir de ses premiers moments. Les parties sont assez largement indépendantes, sauf la dernière qui mobilise l'ensemble des résultats précédents. Certaines questions peuvent toutefois faire appel à des résultats vus dans des questions précédentes : le résultat d'une question, même si elle n'est pas résolue, peut être admis dans les questions suivantes. Il est conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer. La notation tiendra largement compte de la clarté et de la précision des réponses.

1 Notation, rappels et compléments

L'inégalité de Cauchy-Schwarz stipule que si x et y sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$ (pour un entier n positif), alors

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\,.$$

Pour tout $x \in [0,1]$, $\mathscr{B}(x)$ désigne la loi de Bernoulli de paramètre x. Par abus de langage, on parlera de l'espérance d'une loi de probabilité pour désigner l'espérance d'une variable aléatoire dont c'est la loi. On dira ainsi par exemple que la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(x)$ a pour espérance x.

Dans tout le problème, on considère un ensemble fini Ω, sous-ensemble de $[0,1]$, de cardinal noté $|\Omega|$. On note $\mathfrak{M}_1(\Omega)$ l'ensemble des lois de probabilités sur Ω (muni de la tribu de ses parties).

Notation inhabituelle pour l'espérance : si $p \in \mathfrak{M}_1(\Omega)$, et si φ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on notera

$$p \cdot \varphi = \sum_{\omega\in\Omega} p\big(\{\omega\}\big)\varphi(\omega)\,.$$

Par exemple, si pour $k \in \{1,2\}$ on note $\varphi_k(u) = u^k$, alors la variance d'une variable de loi p s'écrit $p\cdot\varphi_2 - \big(p\cdot\varphi_1\big)^2$.

L'inégalité de Jensen stipule en particulier que si φ est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, deux fois dérivable et de dérivée seconde strictement positive sur I, alors pour tout loi de probabilité p sur Ω et toute variable aléatoire réelle $X : \Omega \to I$,

$$\varphi\left(\sum_{\omega\in\Omega} p\big(\{\omega\}\big)\, X\big(\omega\big)\right) \leq \sum_{\omega\in\Omega} p\big(\{\omega\}\big)\varphi\big(X(\omega)\big)\,,$$

c'est-à-dire que $\varphi(p\cdot X) \leq p\cdot(\varphi\circ X)$. L'inégalité est stricte dès lors qu'il existe deux éléments distincts ω et ω' de Ω tels que $p\big(\{\omega\}\big) > 0$, $p\big(\{\omega'\}\big) > 0$ et $X(\omega) \neq X(\omega')$.

Pour toute loi de probabilité p sur Ω, on note $\mathrm{Supp}(p) = \Big\{\omega \in \Omega : p\big(\{\omega\}\big) > 0\Big\}$ son support. On définit la *divergence de Kullback-Leibler* de deux lois p et q sur Ω de la façon suivante :

$$K(p,q) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\omega\in\mathrm{Supp}(p)} p\big(\{\omega\}\big)\log\frac{p\big(\{\omega\}\big)}{q\big(\{\omega\}\big)} & \text{si } \mathrm{Supp}(p) \subset \mathrm{Supp}(q)\,, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

2 Le cas binaire

Dans cette partie seulement, on considère le cas particulier $\Omega = \{0,1\}$.

1. Comment appelle-t-on la loi p telle que $p\big(\{0\}\big) = 1/4$ et $p\big(\{1\}\big) = 3/4$?

2. Montrer que pour tout réel $m \in [0,1]$ il existe une loi p sur Ω d'espérance m.

3. Montrer que pour tout réel $v \in [0,1/4]$ il existe une loi p sur Ω de variance v.

4. Existe-t-il une loi de probabilité p sur Ω d'espérance m et de variance v pour tout couple $(m,v) \in [0,1] \times [0,1/4]$?

5. On définit la fonction $\kappa : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $\kappa(x) = K\big(\mathscr{B}(x), \mathscr{B}(1/2)\big)$. Tracer schématiquement le graphe de la fonction κ.

6. Montrer que pour tous $x, y \in [0,1]$,

$$K\big(\mathscr{B}(x), \mathscr{B}(y)\big) \geq 2(x-y)^2 .$$

3 Divergence de Kullback-Leibler

Dans cette partie, p et q désignent deux lois de probabilité sur Ω.

7. Si u est la loi uniforme sur Ω, donner une expression de $K(p,u)$ en fonction des $p\big(\{\omega\}\big)$.

8. Soit φ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par la relation :

$$\varphi(u) = \begin{cases} u\log(u) & \text{si } u > 0 , \\ 0 & \text{si } u = 0 . \end{cases}$$

Montrer que φ est une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.

9. Montrer que, si $\mathrm{Supp}(p) \subset \mathrm{Supp}(q)$,

$$K(p,q) = \sum_{\omega \in \mathrm{Supp}(q)} q\big(\{\omega\}\big)\varphi\left(\frac{p\big(\{\omega\}\big)}{q\big(\{\omega\}\big)}\right) .$$

10. Montrer que l'on a toujours $K(p,q) \geq 0$.

11. Que peut-on dire si $K(p,q) = 0$?

12. Montrer que si $A \subset \Omega$ alors

$$K\Big(\mathscr{B}\big(p(A)\big), \mathscr{B}\big(q(A)\big)\Big) \leq K(p,q) .$$

On pourra appliquer l'inégalité de Jensen rappelée ci-dessus, en explicitant très clairement comment.

13. On définit

$$T(p,q) = \sup_{f:\Omega\to[0,1]} p\cdot f - q\cdot f ,$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to [0,1]$. Montrer que $T(p,q) = p(A) - q(A)$, où $A = \left\{\omega \in \Omega : p\big(\{\omega\}\big) > q\big(\{\omega\}\big)\right\}$.

14. En utilisant la question 6 et les questions précédentes, montrer que $K(p,q) \geq 2\,T(p,q)^2$.

15. Soient g_1 et g_2 deux fonctions définies sur Ω supposées telles que $p\big(\{\omega\}\big) = \exp(g_1(\omega))$ et qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ vérifiant la relation $q\big(\{\omega\}\big) = \exp(g_2(\omega) - c)$.

    (a) Montrer pour tout réel c l'inégalité $\exp(c) - c - 1 \geq 0$.

    (b) Montrer que pour tout réel x,

$$\exp(x) - x - 1 \leq \frac{x^2}{2} \exp\big(\max(x,0)\big)\,.$$

    (c) En notant $\Delta = \max_{\omega\in\Omega} |g_1(\omega) - g_2(\omega)|$, montrer que

$$K(p,q) \leq \frac{\Delta^2 \exp(\Delta)}{2}\,.$$

4 Polynômes de Bernstein

Pour tout réel positif L, une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite L-Lipschitzienne si

$$\forall\, x, y \in [0,1], \quad \big|g(x) - g(y)\big| \leq L\,|x - y|\,.$$

On note $\mathrm{Lip}(L)$ l'ensemble des fonctions définies sur $[0,1]$ qui sont L-Lipschitziennes. On se propose dans cette partie de construire pour toute fonction $g \in \mathrm{Lip}(L)$ des polynômes qui l'approximent uniformément. Pour cela, on fixe un entier k strictement positif, et on définit le polynôme B_k par la formule suivante :

$$B_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j (1-x)^{k-j}\, g\left(\frac{j}{k}\right)\,.$$

16. Dans cette question seulement, $g(x) = |2x - 1|$ et $k = 2$.

    (a) Pour quelles valeurs de L la fonction g est-elle L-Lipschitzienne ?

    (b) Donner l'expression de $B_2(x)$.

    (c) Tracer sur un même graphe les fonctions g et B_2.

17. Que peut-on dire du degré du polynôme B_k ?

18. Soit $x \in [0,1]$, et soient $X_1, \ldots, X_k$ des variables indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre x. On définit $\bar{X}_k = (X_1 + \cdots + X_k)/k$.

(a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $\bar{X}_k$, et avec quelles probabilités ?

(b) Exprimer $\mathbb{E}\big[g(\bar{X}_k)\big]$ en fonction de $B_k(x)$.

(c) Quelle est l'espérance de $\bar{X}_k$?

(d) Montrer que la variance de $\bar{X}_k$ est inférieure ou égale à $1/(4k)$.

(e) En pensant si besoin à l'inégalité de Cauchy-Schwarz ou à l'inégalité de Jensen, montrer que

$$\mathbb{E}\big[|\bar{X}_k - x|\big] \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}\,.$$

(f) En déduire que

$$\big|g(x) - B_k(x)\big| \leq \frac{L}{2\sqrt{k}}\,.$$

5 Distance de Wasserstein

Dans cette partie, p et q désignent deux lois de probabilité sur Ω. On définit

$$W(p,q) = \sup_{g \in \mathrm{Lip}(1)} \big|p \cdot g - q \cdot g\big|\,,$$

le supremum étant pris sur toutes les fonctions 1-Lipschitziennes sur $[0,1]$.

19. Soient x et y deux nombres réels compris entre 0 et 1. Si $\Omega = \{0,1\}$, $p = \mathscr{B}(x)$ et $q = \mathscr{B}(y)$, que vaut $W(p,q)$?

20. Montrer que W définit sur l'ensemble des lois de probabilité sur Ω une distance.

21. En notant bien que $\Omega \subset [0,1]$, montrer que $W(p,q) \leq T(p,q)$, et en déduire que $W(p,q) \leq \sqrt{K(p,q)/2}$.

22. Si $\Omega = \{j/10 : 0 \leq j \leq 10\}$, montrer qu'il existe deux lois de probabilité p et q sur Ω telles que $W(p,q) \leq 1/10$ et $K(p,q) = +\infty$.

23. Est-il possible de prouver une inégalité du type $K(p,q) \leq 8\,W(p,q)$ qui soit valable pour tout ensemble fini $\Omega \subset [0,1]$ et toutes lois de probabilité p et q sur Ω ?

6 Identification et approximation

Soit k un entier strictement positif. On étudie dans quelle mesure une loi de probabilité p sur Ω peut être identifiée ou au moins approximée si on connaît ses k premiers moments. On définit donc pour tout entier j compris entre 0 et k la fonction $\varphi_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la relation

$\varphi_j(u) = u^j$, et on écrit pour tout réel u le vecteur $\varphi(u) = \begin{pmatrix} \varphi_0(u) \\ \varphi_1(u) \\ \vdots \\ \varphi_k(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1}$, avec $\varphi_0(u) = 1$. On note de plus $p \cdot \varphi = \begin{pmatrix} p \cdot \varphi_0 \\ p \cdot \varphi_1 \\ \vdots \\ p \cdot \varphi_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1}$ le vecteur des k premiers moments de la loi p. On note $\mathscr{M} = \{q \in \mathfrak{M}_1(\Omega) : q \cdot \varphi = p \cdot \varphi\}$ l'ensemble des lois de probabilités sur Ω qui ont les mêmes k premiers moments que p.

24. Quand $\Omega = \{0,1\}$, pour quelles valeurs de k a-t-on $\mathscr{M} = \{p\}$ quel que soit $p \in \mathfrak{M}_1(\Omega)$?

25. Montrer plus généralement que $\mathscr{M} = \{p\}$ dès que $|\Omega| \leq k+1$.

26. Soit p une loi de probabilité sur $\Omega = \{0, 1/2, 1\}$ telle que $p\big(\{0\}\big) > 0$ et $p\big(\{1\}\big) > 0$. Pour $k = 1$, quel est le cardinal de $\mathscr{M}$?

27. Montrer que si $p \cdot \varphi = q \cdot \varphi$, alors $W(p,q) \leq 1/\sqrt{k}$.

7 Approximation d'une loi régulière

On suppose dans cette partie que p est une loi de probabilité sur Ω telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $p\big(\{\omega\}\big) = \exp\big(g(\omega)\big)$, où g est une fonction L-Lipschitzienne telle que $\sum_{\omega\in\Omega} \exp\big(g(\omega)\big) = 1$. On note toujours $\mathscr{M}$ l'ensemble des lois de probabilités sur Ω qui ont les mêmes k premiers moments que p. On définit

$$\Theta = \left\{ \theta = (\theta_0, \ldots, \theta_k) \in \mathbb{R}^{k+1} : \sum_{\omega\in\Omega} \exp\left(\sum_{j=0}^{k} \theta_j \omega^j \right) = 1 \right\}.$$

Pour $\theta \in \Theta$, on définit q_θ la loi de probabilité sur Ω telle que $q_\theta\big(\{\omega\}\big) = \exp\Big(\sum_{j=0}^{k} \theta_j \omega^j\Big)$, et $\mathscr{E} = \big\{q_\theta : \theta \in \Theta\big\}$.

On *admettra* qu'il existe $\bar\theta \in \Theta$ tel que $q_{\bar\theta}$ est l'unique élément de l'intersection de $\mathscr{M}$ avec $\mathscr{E}$.

28. On note u la loi uniforme sur Ω. Montrer que pour tout $q \in \mathscr{M}$,

$$K(q,u) = K(q_{\bar\theta}, u) + K(q, q_{\bar\theta}).$$

En déduire que la fonction $q \mapsto K(q,u)$ est minimale sur $\mathscr{M}$ en $q_{\bar\theta}$.

29. Montrer que pour tout $q_\theta \in \mathscr{E}$,

$$K(p, q_\theta) = K(p, q_{\bar{\theta}}) + K(q_{\bar{\theta}}, q_\theta)\,.$$

En déduire que la fonction $\theta \mapsto K(p, q_\theta)$ est minimale en $\bar{\theta}$.
Indication : on pourra commencer par calculer $K(p, q_\theta) - K(p, q_{\theta'})$ pour $\theta, \theta' \in \Theta$.

30. Montrer que

$$K(p, q_{\bar{\theta}}) \leq \frac{L^2}{8k} \exp\left(\frac{L}{2\sqrt{k}}\right).$$

31. On suppose désormais qu'on ne connaît pas les moments de la loi p, mais qu'on dispose d'un échantillon de n variables indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de loi p.

    (a) Pour chaque $j \in \{1, \ldots, k\}$, construire à l'aide des variables $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ un intervalle de confiance de risque au plus $\alpha \in (0,1)$ pour $p \cdot \varphi_j$.

    (b) Proposer une région de confiance de risque au plus α pour $p \cdot \varphi$, c'est-à-dire un sous-ensemble aléatoire de $\mathbb{R}^{k+1}$ fonction de $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ qui contienne $p \cdot \varphi$ avec probabilité au moins $1 - \alpha$ quel que soit $p \in \mathfrak{M}_1(\Omega)$.

    (c) Proposer ensuite un estimateur de la loi p elle-même, et discuter sa précision.

32. Peut-on transposer les résultats précédents au cas où $\Omega = [0,1]$, et où p est une loi à densité sur Ω ?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2026

Épreuve d'anglais

Durée : 2h

L'épreuve est constituée de deux parties : un résumé et une traduction. Vous rédigerez ces deux parties sur **deux copies séparées**, sur lesquelles vous indiquerez respectivement « Anglais / résumé » et « Anglais / traduction ».

1 Summarize this text in English in 200 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

Prediction Markets are a National Security Threat

Millions of dollars have been bet and won on the US wars in Venezuela and now Iran through Polymarket. It's ghoulish and corrupt, and has to stop.

Matt Motta and Robert Ralston Mar 06, 2026

Hours before an Israeli attack in Tehran killed Ayatollah Khamenei, an account on the prediction market Polymarket made over half a million dollars wagering that Iran's Supreme Leader would vacate office before 3/31. That account, named "Magamyman," was not the only one to cash in on the attacks.

Half a dozen Polymarket accounts made over $1.2M betting that the U.S. "strikes Iran by February 28, 2026." Those accounts were allegedly paid for through cryptocurrency wallets that had previously not been funded prior to Feb. 27. Overall, prediction market users bet over $255M on markets related to the attacks in Iran on the prediction markets Kalshi and Polymarket alone.

This is not the first time that prediction market users have profited off international affairs. For example, the night that the U.S. military embarked to capture Nicolás Maduro, an unknown individual placed a bet on the prediction market Polymarket that Maduro would be out of power by the end of January. That individual bet over $32,000, and, within hours, made over $400,000.

These unknown individuals may have had a particularly lucky hunch about US involvement in Iran or Venezuela. However, both timing and volume of the trading that occurred raise another explanation — that these individuals may have had inside information about the impending military action. Betting activity like this shines a light on a new problem facing national security: prediction markets. As both policy and international affairs experts, we urge Congress to take action to change that.

Prediction markets (like Kalshi, Polymarket and Predictit) can be thought about like stock markets. Individual "traders" make predictions in the form of investments that certain events might come to pass ("event contracts"). Prediction markets cover sports (an active source of litigation in Massachusetts), celebrity gossip (e.g., Kalshi has a market for "who will attend the Oscars?"), and more. Prediction markets also offer trading on international affairs. For example, a Predictit market allows users to bet on the question "Will the US purchase Greenland in 2026?" (defined as a situation wherein "the United States, as a sovereign entity, publicly purchases the Island of Greenland in 2026"). As of this writing, "Yes" values were trading at $0.06 USD, and "Nos" at $0.94. This means that someone investing buying 100 shares on the "Yes" outcome would win a net profit of $94 USD ($100 - $6) if the US were to purchase Greenland before 12/31/26. Another prediction market, Polymarket, even offered trading on whether a nuclear weapon would be detonated this calendar year, which experts cited as a potential national security risk. Polymarket quietly pulled the market however, following pushback on social media.

The incentive for prediction market abuse by government officials is, in our view, obvious for at least two reasons. One issue concerns fairness in prediction market operations. Government actors may have more information than most people about domestic and international politics. Officials in the Department of War, for example, could have far more information about whether or not leaders will be deposed, the onset of international conflict, and more.

Second, and more problematically, we worry that government officials can use prediction markets for personal gain, at the expense of national security. People with the power to influence international affairs could alter their actions in order to make a profit on a prediction market. If, for example, a government official in the Department of War had been invested in the market predicting when President Maduro would be captured, or when the U.S. might strike Iran, they might have altered the timing of the operation in order to make a profit.

It is important to note that Polymarket had previously been banned from operating in the U.S. under President Biden, due to regulatory considerations. However, it was allowed to return under the second Trump administration. Their willingness to do so may result from the prospect of personal financial gain. President Trump's son Donald Trump Jr. has been serving as an advisor to Polymarket since August 2025. Our point is that the potential for abuse exists. Congress must act to regulate it.

Failing to regulate prediction markets could pose important risks to national security. For example, prediction markets may become sources of intelligence for adversaries. By signalling when military action might be preparing to take place, military personnel may be put in more danger than is operationally necessary. Additionally, nefarious actors may use prediction markets to sow geopolitical instability. If foreign adversaries want to stoke international conflict they could manipulate the prediction markets by strategically placing wagers on events in order to send misleading signals about what traders expect to happen. It is not difficult to imagine Polymarket's betting market on nuclear detonation, for example, sowing tension, uncertainty and anxiety, particularly if people think there is inside knowledge being used in the driving of the markets. That could make diplomacy more difficult and lead to foreign policy crises.

Congress has long recognized the importance of placing strict limits on some prediction markets. For example, the 2012 STOCK Act requires members of Congress and senior staff to (a) avoid investing in stocks and securities for which they may have insider information, and (b) regularly disclose their holdings. The law aims to guard against both unfairness and market manipulation by government actors.

Today, Congress is considering legislation that would aim to regulate insider trading on prediction markets. For example, newly introduced legislation in the US House (HR 7004) would ban elected officials in the federal government, Congressional employees, and other political appointees from participating in prediction markets if they have nonpublic information relevant to that market. Presently, though, the legislation does not go as far as the STOCK Act in terms of requiring disclosure of betting activity. Whatever form legislation might take, action is necessary to regulate the ability of government officials to place wagers on prediction markets. U.S. national security depends on it.

2 Translate the following text into French, title included.

EU agrees to guzzle US gas

Donald Trump has notched up another trade deal. This time with the EU. That was after he had told Europe to “stop the windmills”.

“Today’s deal creates certainty in uncertain times,” said European Commission president Ursula von der Leyen. The EU may have had little choice but to accept, but the terms of the agreement are widely criticised.

In addition to a 15 per cent tariff rate for the majority of EU exports, the agreement includes greater co-operation on energy, switching out Russian gas and oil in favour of “significant purchases of US liquified natural gas and oil”.

Jörgen Warborn, spokesperson on international trade for the European People’s party in the European parliament, says the imposition of a 15 per cent baseline tariff is “a blatant breach of World Trade Organization principles and a serious blow to European industrial competitiveness”.

“At a time of rising geopolitical tensions, a rules-based trading system is more essential than ever to provide the predictability that businesses and citizens depend on,” he says. “The EU must not take any action that risks undermining this framework. Our objective must remain zero-for-zero tariffs on industrial goods.”

The deal could be “extremely dangerous” for the climate and Europe’s energy security. US LNG from fracked gas has a 33 per cent higher lifecycle emissions footprint than coal, he highlights, while across a 20-year timeframe, methane is at least 80 times more potent than carbon dioxide as a climate pollutant.

By Philippa Nuttall, July 28, 2025

https://www.sustainableviews.com/editors-note-eu-agrees-to-guzzle-us-gas-b75a895a/